Alla professoressa Mantovani

Istud quod tu summum putas gradus est
[Seneca]

Indice

Introduzione

I titoli di Stato (o *bond*) sono obbligazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per accumulare liquidità necessaria per pagare i dipendenti pubblici, le pensioni e per pagare chi ha precedentemente acquistato i titoli. Il debito pubblico è il debito che lo Stato ha nei confronti di chi ha acquistato i bond emessi e ancora in vita. Alla maturità del titolo lo Stato rimborsa il capitale, ma vi può essere anche il pagamento di cedole (fisse o variabili) durante la vita del titolo. Per avere la liquidità necessaria per pagare i bond scaduti, vengono riemessi altri titoli. È molto importante che uno Stato riesca a vendere i suoi titoli, altrimenti potrebbe rischiare, tra le altre cose, di non essere in grado di rispettare gli obblighi contrattuali verso i precedenti creditori oppure di non avere la liquidità necessaria per pagare le pensioni o gli stipendi. L'emissione del titolo avviene in un asta di mercato e può essere alla pari, sotto la pari o sopra la pari, a seconda che il prezzo sia uguale, minore o maggiore del valore nominale. In genere in un titolo emesso sopra la pari il valore della cedola è superiore ai tassi correnti di mercato. I titoli di Stato possono essere scambiati anche durante la loro vita in un mercato secondario, che in Italia è il Mercato Telematico Regolamentato delle Obbligazioni e dei Titoli di Stato, detto MOT. In ogni caso, per acquistarli, il cittadino deve affidarsi ad una banca o ad un intermediario finanziario. L'importo minimo sottoscrivibile in Italia è, al momento, 1000 euro. Sono tre le categorie più importanti di titoli di Stato emessi: I Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) che sono titoli di durata al massimo annuale che sono privi di cedola e dunque il rendimento dipende unicamente dalla differenza tra il valore nominale e il prezzo di acquisto; i Zero Coupon Bond (chiamati anche Certificati del Tesoro) (CTZ) della durata di 24 mesi e privi di cedola; i Buoni del Tesoro Poliennali (BTP) che sono titoli della durata variabile da 3 a 30 anni e che prevedono il pagamento di cedola fissa semestrale. Oltre a queste categorie, vi sono anche una serie di obbligazioni ad un tasso variabile, che dipendono per esempio dal tasso di inflazione europea.

Il prezzo di un obbligazione e i suoi successivi rendimenti dipendono da alcuni fattori quali l'andamento dei tassi di interesse, la durata del titolo, il valore della cedola e dal rating dell'emittente. Il rating è l'espressione quantitativa della qualità dell'emittente, rappresenta la probabilità di fare default (insolvenza), ovvero la probabilità che per vari motivi l'emittente possa non essere in grado di rispettare l'obbligo contrattuale di pagare la cedola o gli interessi dei titoli che ha emesso. I rating vengono decisi da società (al momento solo americane) quali la Moody's o Standard&Poor. Il rating tiene conto di moltissimi fattori quali la struttura patrimoniale, il livello di liquidità e la situazione politica e sociale del paese. La scala usata va da AAA che rappresenta uno Stato che ha probabilità di fare default due volte su 10000 anni fino a D che rappresenta uno Stato che ha già una situazione di default in qualche investimento finanziario. All'Italia attualmente è assegnato il rating AA mentre le principali potenze europee (Francia, Germania, Inghilterra) godono della tripla A. Risulta abbastanza chiaro da questa analisi che più il livello di rating di uno Stato è basso, più è rischioso comprare i suoi titoli e dunque i tassi di interesse che lo Stato deve offrire devono essere maggiori: a parità di rendimenti si preferisce un bond di uno Stato con rating migliore e dunque se l'Italia ha bisogno immediato di liquidità deve offrire all'acquirente un guadagno maggiore rispetto, per esempio, alla Germania. Al momento si considera la Germania come lo Stato, in Europa, più sicuro dal punto di vista economico-finanziario e dunque quello che riesce a vendere i suoi titoli di Stato a rendimenti più bassi di tutti. Diventa importante dunque, per un altra nazione europea, minimizzare lo *spread* (il differenziale di rendimento) tra i suoi BTP e quelli tedeschi (chiamati BUND). Se lo spread con i BTP italiani è di 300 punti base, per esempio, vuol dire che l'Italia per vendere i suoi titoli deve offrire il 3.00 % in più di interessi.

In Europa, la politica monetaria è decisa dalla Banca Centrale Europea (BCE) che decide i tassi di interesse e vigila sulla stabilità dei prezzi. Ogni mese la BCE decide il tasso *REFI* (tasso per le operazioni di rifinanziamento), ovvero il valore indicizzato che le banche sono tenute a pagare quando prendono in prestito del denaro dalla BCE. In realtà la BCE emette denaro a costo praticamente nullo e lo presta alle banche o agli Stati a valore nominale, comprando dallo Stato i suoi titoli ad un tasso di interesse che può variare dall'1% al 3%. È dunque molto importante che, al variare dei tassi di interesse, un qualunque Stato cerchi di ottimizzare la sua emissione di titoli, in maniera tale da minimizzare il rischio di una perdita elevata che potrebbe portarlo ad un declassamento del rating oppure ad un aumento del debito pubblico.

In questo testo simuleremo l'evoluzione dei tassi di interesse attraverso una dinamica binomiale, i quali ad ogni istante di tempo possono solo salire o scendere di una fissata quantità. Cercheremo di decidere una emissione ottimale dei titoli di Stato che limiti il rischio di una perdita elevata e minimizzi il costo che lo Stato che dovrà sostenere. In particolare:

Il Capitolo 1 introdurrà il concetto di misura martingala equivalente e mostreremo una misura martingala adatta al nostro modello che servirà poi a quantificare la cedola per i BTP.

Nel Capitolo 2 verrà presentato il modello su cui andremo a lavorare, attraverso il fattore di capitalizzazione composta e la quantificazione dei costi dello Stato, introducendo il concetto di misure di rischio *coerenti* e soffermandoci soprattutto su una misura di rischio (il *Conditional Value at Risk*, CVaR) che dato un qualunque investimento ne quantifica il rischio.

Nel Capitolo 3 verrà usata la misura di rischio introdotta precedentemente come vincolo per limitare perdite elevate e implementeremo il modello in due scenari di tempo diversi (rispettivamente un anno e un anno e mezzo) prima tramite una dettagliata spiegazione e poi tramite un programma (*Mathematica*) e discuteremo i risultati ottenuti.

Infine verranno scritti i codici usati per implementare le Figure e un'appendice dedicata alla ricerca della misura martingala sotto alcune condizioni.

Capitolo 1

Martingalità e assenza di arbitraggio

Supponiamo che tutte le variabili aleatorie che tratteremo in questo testo vivano in uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i cui atomi sono sequenze di vettori a valori reali che rappresentano l'andamento dei tassi di interesse. L'insieme dei tempi è dato da: $I = \{\{t_0, t_1, \ldots, t_H\} \, | t_i = t_{i-1} + K, K > 0\}$. Partiremo, per convenienza, da $t_0 = 0$. È conveniente modellare uno spazio di probabilità finito con uno scenario ad albero: ad ogni generico periodo t_i, $1 \leq i \leq H$ avremmo una serie di nodi $n \in N_{t_i}$ e la partizione degli atomi di probabilità $\omega \in \Omega$ corrisponde uno ad uno con questi nodi. L'albero della radice $(n = 0)$ corrisponde alla partizione banale $N_{t_0} = \Omega$ e i nodi finali $n \in N_{t_H}$ corrispondono uno ad uno con gli atomi di probabilità $\omega \in \Omega$. Supponiamo inoltre che la σ-algebra $\mathcal{F}_{t_i}$ generata dalla partizione N_{t_i} soddisfi alla proprietà di filtrazione: $\mathcal{F}_{t_0} = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_{t_i} \in \mathcal{F}_{t_{i+1}}$, $0 \leq i < H$ e $\mathcal{F}_{t_H} = \mathcal{F}$. In uno scenario ad albero ogni nodo $n \in N_{t_i}$ per $1 \leq i \leq H$ avrà un unico padre rappresentato con $\alpha(n) \in N_{t_{i-1}}$ e ogni nodo $n \in N_{t_i}$ per $0 \leq i \leq H-1$ avrà un numero non vuoto di figli $c(n) \in N_{t_{i+1}}$. Indichiamo infine con $\mathcal{H}(n)$ l'insieme dei nodi appartenente all'unico cammino che lega la radice con il nodo n. La distribuzione di probabilità P si ottiene assegnando dei pesi $p_n > 0$ ad ogni nodo finale $n \in N_{t_H}$ tali che $\sum_{n \in N_{t_H}} p_n = 1$. Per ogni nodo non terminale si ha, ricorsivamente,

$$p_n = \sum_{m \in c(n)} p_m, \ n \in N_{t_i}, \quad i = H-1, \ldots, 0 \tag{1.1}$$

così che, come è logico attendersi, la probabilità di un nodo padre è la somma delle probabilità dei nodi dei suoi figli. Notiamo che $\frac{p_m}{p_n}, m \in c(n)$ è la probabilità del nodo figlio m condizionata al nodo padre n, ovvero $P(m|n)$.

Un esempio di un scenario ad albero binomiale non ricombinante, descritto nel paragrafo precedente è quello rappresentato in Figura (1.1). .

Una variabile aleatoria r è una funzione a valori reali definita su Ω. Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie reali $\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$, definite sullo stesso spazio probabilizzato. L'interpretazione più comune (che è anche quella che utilizzeremo nella nostra trattazione) è quella di un fenomeno aleatorio (il tasso di interesse) che evolve nel tempo. Inoltre, per ogni $\omega \in \Omega$ fissato, la

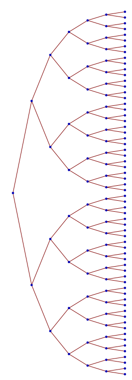

Figura 1.1: struttura ad albero

funzione $t \in I \to r_t(\omega)$ viene chiamata traiettoria (o percorso) del processo r. Indicheremo il processo stocastico con $\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$, mentre indicheremo con r_n il valore del processo nel nodo $n \in N_{t_i} \quad t_i \in I$. Il valor medio del processo stocastico e il valor medio condizionato sono definiti rispettivamente da:

$$E^P[r_{t_i}] = \sum_{n \in N_{t_i}} p_n r_n$$

$$E^P[r_{t_{i+1}} | N_{t_i}] = \sum_{m \in c(n)} \frac{p_m}{p_n} r_m$$

Supponiamo che il mercato sia formato da $J+1$ titoli, indicizzati da $j = 0, \dots, J$, i cui prezzi in un generico nodo n sono denotati dal vettore $V_n = (V_n^0, \dots, V_n^J)$. Supponiamo che uno dei titoli, per esempio il primo, abbia sempre un valore strettamente positivo. Possiamo usare questo come *numeraire* e introducendo il fattore di sconto $\beta_n = \frac{1}{V_n^0}$, poniamo con $Z_n^j = \beta_n V_n^j$ i prezzi scontati. Indicheremo con θ_n^j la quantità del titolo j-esimo comprato da un investitore in un nodo $n \in N_{t_i},\ t_i \in I$ e con $a \cdot b$ il prodotto scalare tra a e b. Dunque il valore scontato del portafoglio nel generico nodo n risulta essere

$$S_n = Z_n \cdot \theta_n = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j \theta_n^j$$

Definizione 1.1 (Portafoglio autofinanziante). Un portafoglio $(\theta_n^0, \dots, \theta_n^J)$ è detto autofinanziante se vale la relazione:

$$S_n = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j \theta_n^j = \sum_{j=0}^{J} Z_n^j \theta_{n+1}^j \quad n \in N_{t_i}\ t_i \in I$$

L'autofinanziamento permette di non immettere ne prelevare denaro e dunque di poter modificare il proprio portafoglio per il generico periodo $[t_i, t_{i+1}]$ con tutti e solo i soldi di cui disponiamo in t_i.

Definizione 1.2 (Arbitraggio)**.** Un arbitraggio è un portafoglio autofinanziante che verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &i)\ S_0 = 0 \\ &ii)\ S_n \geq 0 \quad \forall n \in N_{t_H} \\ &iii)\ P(S_n > 0, \quad \forall n \in N_{t_H}) > 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Per trovare un arbitraggio cerchiamo l'esistenza di un portafoglio che soddisfi alle condizioni di (1.2). Il problema può essere scritto nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \quad \sum_{n \in N_{t_H}} & p_n [Z_n \cdot \theta_n] \\ Z_0 \cdot \theta_0 &= 0 \\ Z_n \cdot [\theta_n - \theta_{\alpha(n)}] &= 0 \quad n \in N_{t_i}, \quad 1 \leq i \leq H \\ Z_n \cdot \theta_n &\geq 0 \quad n \in N_{t_H}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Infatti il portafoglio ha valore iniziale nullo, segue l'autofinanziamento ed ha un valore terminale non negativo in ogni possibile scenario finale. Notiamo che la condizione *iii)* di (1.2) è soddisfatta se l'ottimo della funzione obiettivo in (1.3) è positivo. Il processo dei prezzi è chiamato *processo dei prezzi liberi da arbitraggio* se questo sistema non ha soluzione oppure ha soluzione non positiva. Vogliamo ora analizzare questo sistema attraverso un problema strettamente correlato, famoso in programmazione lineare, chiamato problema duale.

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \ & 0x + 0y \\ x_n &\leq 0 \quad n \in N_{t_H} \\ [p_n - y_n - x_n] \cdot Z_n &= 0 \quad n \in N_{t_H} \\ y_n - \sum_{m \in c(n)} y_m \cdot Z_m &= 0 \quad n \in N_{t_i},\ i \leq H-1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Il teorema fondamentale di programmazione lineare dice che il problema primale ammette valor ottimo *se e solo se* il problema duale ammette valor ottimo e inoltre che, se questo avviene, i due problemi hanno la stessa soluzione ottima. Notiamo inoltre che il problema primale (1.3) è ammissibile (infatti il portafoglio identicamente nullo soddisfa ai vincoli). Ne segue, sempre per il teorema fondamentale, che il problema duale (1.4) o amette ottimo (e dunque anche il primale lo amette) oppure è inammissibile. Introduciamo ora il concetto di misura martingala.

Definizione 1.3 (Misura martingala)**.** Una misura martingala è una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che:

i) Q è equivalente (ha gli stessi eventi di probabilità nulla) a P;

ii) per ogni $i \leq H-1$ vale :

$$Z_{t_i} = E^Q[Z_{t_{i+1}} | N_{t_i}] \tag{1.5}$$

Una misura martingala è chiamata anche *misura neutrale al rischio*, perchè la *ii)* può essere interpretata economicamente come una formula di valutazione neutrale al rischio. Vale infatti che:

Osservazione 1.

$$E^Q[Z_{t_i}] = E^Q[Z_0], (0 \leq i \leq H)$$

Dimostrazione. Basta prendere il valor medio da *ii)* e usare la tower-property della probabilità condizionata. □

Enunciamo e dimostriamo ora il teorema fondamentale che lega martingale e arbitraggio.

Teorema 1.1 (Primo teorema fondamentale dell' *asset pricing*)**.** *Un processo stocastico a tempo discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

Dimostrazione.

Condizione necessaria

Se non c'è arbitraggio, allora il problema primale (1.3) è limitato. Essendo l'insieme dei suoi vincoli ammissibile per il portafoglio identicamente nullo, ne segue che ammette ottimo e dunque anche il duale ammette una soluzione ottima (x^*, y^*). Il valore del numeraire Z^0 è sempre uguale ad 1 in ogni istante, dunque la non positività di x_n implica che

$$y_n > p_n \quad n \in N_{t_H}$$

Inoltre l'ultimo sistema di equazioni implica che:

$$\sum_{m \in c(n)} y_m = y_n$$

Ne segue che y_n è un processo strettamente positivo tale che la somma di y_n di tutti gli stati $n \in N_{t_i}$ $\forall t_i \in I$, è uguale a y_0. Posto $q_n = \frac{y_n}{y_0}$ per ogni $n \in N_{t_H}$ e sia Q la misura di probabilità con i pesi q_n. Riscrivendo l'ultimo sistema di equazione,si ottiene che:

$$\sum_{m \in c(n)} q_m \cdot Z_m = q_n \cdot Z_n \quad (n \in N_{t_i},\ i \leq H-1)$$

Dunque si ha che Q è un misura martingala per il processo $\{Z_{t_i}\}_{t_i \in I}$.

Condizione sufficiente

Supponiamo che esista una misura martingala Q. Definito $y_0 = \left\{ \max \frac{p_n}{q_n} | n \in N_{t_H} \right\}$, posto $y_n = q_n y_0, \quad n \in \Omega$. Sia inoltre $x_n = p_n - y_n, \quad n \in N_{t_H}$. Notando che $x_n = y_n - q_n y_0 \leq y_n - q_n \frac{p_n}{q_n} = 0$.

Dunque il vettore (x, y) è soluzione amissibile del duale e ne segue che il primale è limitato e dunque non vi può essere arbitraggio. □

1.1 T-bond e dinamica dei tassi di interesse

Mostreremo in questa sezione che per la struttura del nostro modello esiste una misura martingala e dunque il processo stocastico non permette arbitraggi. Il processo su cui lavoreremo sarà dato da $\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$. Indicheremo nell'elaborato con r_n il valore del tasso nel nodo n. Più precisamente indicheremo, per esempio, con r_{uuudd} il valore del tasso di interesse nel caso i tassi siano saliti le prime tre volte e scesi le ultime due. Questa notazione specifica completamente sia il tempo in cui ci troviamo (nel nostro caso t_5) sia l'evoluzione completa dei tassi di interesse. Il processo dunque avrà la seguente dinamica:

$$r_{c(n)} = \begin{cases} r_n + \sigma\sqrt{K} & \text{con probabilità } q_{c(n)} \\ r_n - \sigma\sqrt{K} & \text{con probabilità } 1 - q_{c(n)} \end{cases} \tag{1.6}$$

dove σ ùn parametro arbitrario positivo e $q_{c(n)}$ rappresenta la probabilità di salire nel nodo n, rispetto a una misura martingala che andremo a determinare nel corso di questa sezione e che dipende dallo stato in cui ci troviamo. Useremo anche per la probabilità, determinata dai pesi q_n, la stessa notazione usata per i tassi di interesse: per esempio q_{uuudu} rappresenta la probabilità che i tassi salgano tra $[t_4, t_5]$ sapendo che sono saliti le prime tre volte e poi sono scesi. Ponendo con $\cdots$ una qualunque stringa di u e d,vale : $q_{\cdots u} + q_{\cdots d} = 1$.

Introduciamo il *fattore di sconto*, ovvero il valore al tempo t_n di un'unità monetaria consegnata al tempo t_N.

$$D(t_n, t_N) := \exp\left(\sum_{k=n}^{N-1} -Kr_{t_k}\right) \tag{1.7}$$

Notiamo che questo valore non è noto al tempo t_n essendo un valore aleatorio che dipende dall'evoluzione dei tassi fino alla scadenza. Definiamo $p(t_k, t_l)$ il prezzo al tempo t_k di T-bond a scadenza in t_l, ovvero di un contratto che garantisce alla scadenza un'unità monetaria. Entrambi indicano il prezzo da pagare per ricevere alla scadenza un' unità monetaria ma vi è una sostanziale differenza tra i due: il primo è aleatorio e dipende dai tassi fino alla scadenza, il secondo è quotato sul mercato e dunque conosciuto. Il legame fra i due sarà specificato dopo questa definizione. Indichiamo con B il valore del conto monetario, che segue la seguente dinamica:

$$B_{t_{n+1}} = B_{t_n} \exp\left(Kr_{t_n}\right) \tag{1.8}$$

Definizione 1.4 (Martingalità sui tassi di interesse)**.** Una misura martingala con numeraire B è una misura di probabilità Q equivalente a P rispetto alla quale i processi dei prezzi scontati dei T-bonds sono delle martingale, ovvero:

$$p(t_n, t_N) \exp\left(Kr_{t_n}\right) = E^Q[p(t_{n+1}, t_N)|\mathcal{F}_{t_n}], \quad 0 \leq n < N \leq H \tag{1.9}$$

Enunciamo senza dimostrare il teorema che lega il prezzo dei T-bonds e fattore di sconto.

Teorema 1.2 (Legame tra fattore di sconto e T-bond)**.** *La condizione di martingalità definita in* (1.9) *è equivalente a:*

$$p(t_n, t_N) = E^Q[D(t_n, t_N)|\mathcal{F}_{t_n}] \tag{1.10}$$

In un modello di mercato *'short'* come quello che stiamo definendo, ovvero dove diamo una dinamica stocastica ai tassi di interesse *short*, usualmente si ipotizza di assegnarla direttamente sotto una misura martingala mediante un processo stocastico definito da alcuni parametri. Tali parametri vengono ricavati successivamente, imponendo che i prezzi del modello in t_0 siano esattamente i prezzi dei bond $p(0, t_i)_{i \leq H}$ scambiati sul mondo reale, ovvero dobbiamo imporre che valga (1.10) posto $t_n = t_0$. Inoltre dobbiamo trovare delle condizioni sui parametri tali che la misura sia effettivamente una misura di probabilità e dunque che $q_{t_i} \in (0, 1) \quad t_i \in I$. Questa procedura è detta *calibrazione del modello.* Inoltre, per quanto detto sopra, il processo $R = (r_{t_i})_{t_i \in I}$ è un processo adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_{i \in I}$.

Abbiamo che $p(0, t_2)$ è un valore noto all'istante iniziale (è il prezzo di un T-bond adesso che mi garantisce il t_2 una unità monetaria). Si ha dunque per il teorema precedente che:

$$p(0, t_2) = E^Q[D(0, t_2)|\mathcal{F}_0] = E^Q[\exp(-K(r_0 + r_1))]$$

Ne segue che:

$$p(0, t_2) \exp(Kr_0) = \exp(K(-r_0 - \sigma\sqrt{K}))q_u + \exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))(1 - q_u)$$

Raccogliendo q_u otteniamo:

$$p(0, t_2) \exp(2Kr_0) = q_u(\exp(-K\sigma\sqrt{K}) - \exp(K\sigma\sqrt{K})) + \exp(K\sigma\sqrt{K})$$

Esplicitando la probabilità q_u si ha che:

$$q_u = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2) \exp(2Kr_0))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} \tag{1.11}$$

Imponendo $q_u \in (0, 1)$, visto che $\sigma, K > 0$ e dunque $\exp(2K\sigma\sqrt{K}) > 1$, abbiamo che:

$$q_u > 0 \leftrightarrow \exp(K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2) \exp(2Kr_0) > 0 \leftrightarrow$$

$$p(0, t_2) < \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) \tag{1.12}$$

Ed inoltre si ha che:

$$q_u < 1 \leftrightarrow \frac{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2) \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} < 1$$

$$\leftrightarrow \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2) \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) < \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1 \leftrightarrow$$

$$p(0, t_2) > \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) \tag{1.13}$$

Possiamo riassumere con la seguente proposizione:

Proposizione 1.3 (Vincoli su $p(0, t_2)$). *In un mercato libero da arbitraggi, il prezzo del T-bond in t_0 a scadenza in t_2 deve soddisfare alla seguente condizione:*

$$\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) < p(0, t_2) < \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) \tag{1.14}$$

Supporremmo, anche nella parte applicativa, che il nostro modello sia libero da arbitraggi e che i parametri σ, K siano abbastanza grandi da soddisfare la disuguaglianza precedente.

In Appendice abbiamo definito una misura di probabilità parametrizzata per q_{t_2} e abbiamo trovato delle condizioni tra i parametri affinchè soddisfi ad essere una misura di probabilità coerente e appropriata con il nostro modello. Vista la probabilità q_u segue che possiamo ipotizzare i seguenti pesi di probabilità al generico tempo t_i:

$$q_{t_i} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu\ p(0,t_i)\exp(K(i+1)r_{t_i}))}{\exp(2i^2K\sigma\sqrt{K}) - 1} \tag{1.15}$$

dove μ è un parametro arbitrario positivo che troveremo imponendo valga (1.10).

Al tempo t_1 abbiamo due nodi, dunque dovranno essere definiti due pesi, q_{uu} e q_{du} che indicano la probabilità di salire tra $[t_1, t_2]$ sapendo rispettivamente che sono saliti tra $[t_0, t_1]$ e che sono scesi tra $[t_0, t_1]$.

Si avrà dunque che:

$$q_{uu} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(3K(r_0 + \sigma\sqrt{K})))}{\exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1} \tag{1.16}$$

$$q_{uu} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(3K(r_0 - \sigma\sqrt{K})))}{\exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1} \tag{1.17}$$

con μ che viene determinato imponendo la (1.10). Cerchiamo, come nel caso precedente, dei vincoli per $p(0,t_3)$. Imponendo la (1.10) in genere troveremo μ dipendente dai parametri sui tassi ma anche da $p(0,t_2)$ e $p(0,t_3)$.

Per questo motivo, nelle seguenti disuguaglianze espliciteremo $\mu p(0,t_3)$ invece di $p(0,t_3)$.

$$q_{uu} > 0 \leftrightarrow \exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(3K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) > 0 \leftrightarrow$$
$$\mu p(0,t_3) < \exp(K(3r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))$$

$$q_{du} > 0 \leftrightarrow \exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(3K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$
$$\mu p(0,t_3) < \exp(K(3r_0 - 4\sigma\sqrt{K}))$$

Dovendo valere entrambe ed essendo $\mu > 0$ abbiamo che il primo vincolo per $p(0,t_3)$ è dato da:

$$\mu p(0,t_3) < \exp(K(3r_0 - 4\sigma\sqrt{K})) \tag{1.18}$$

$$q_{uu} < 1 \leftrightarrow \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(K(3r_0 + 4\sigma\sqrt{K})) < \exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1$$
$$\leftrightarrow \mu p(0,t_3)\exp(K(3r_0 + 4\sigma\sqrt{K})) > \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - \exp(8K\sigma\sqrt{K}) + 1 \leftrightarrow$$
$$\mu p(0,t_3) > \exp(K(-3r_0 - 4\sigma\sqrt{K})) + \exp(K(-3r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) - \exp(K(-3r_0 + 4\sigma\sqrt{K}))$$

$q_{du} < 1 \leftrightarrow \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - \mu p(0,t_3)\exp(K(3r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) < \exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1 \leftrightarrow$
$\mu p(0,t_3)\exp(K(3r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) > \exp(2K\sigma\sqrt{K}) - \exp(8K\sigma\sqrt{K}) + 1 \leftrightarrow \mu p(0,t_3) >$
$\exp(K(-3r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + \exp(K(-3r_0 + 4\sigma\sqrt{K})) - \exp(K(-3r_0 + 10\sigma\sqrt{K}))$

Siccome devono valere entrambe, cerchiamo di capire quale dei due termini a destra è maggiore (possiamo semplificare $\exp(-3Kr_0)$ e poniamo per semplicità di notazione $K\sigma\sqrt{K} = T$).

$$\exp(-4T) + \exp(-2T) - \exp(4T) > \exp(2T) + \exp(4T) - \exp(10T) \leftrightarrow$$

Moltiplicando tutto per $\exp(4T)$:

$$1 + \exp(2T) - \exp(8T) > \exp(6T) + \exp(8T) - \exp(14T) \leftrightarrow$$

Ponendo $\exp(2T) = x$ e portando tutto al primo membro si ha che:

$$x^7 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1 > 0$$

Questo polinomio si scompone in:

$$(x-1)(x+1)(x^5 + x^3 - 2x^2 - 1) > 0$$

Poichè $x = \exp(2\sigma\sqrt{K})) > 1$ il segno viene deciso dal fattore di quinto grado. La funzione $f(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 + 1$ è negativa fino ad $x \approx 1.16$.

$$x \approx 1.16 \to \exp(2K\sigma\sqrt{K}) \approx 1.16 \to$$

$$2K\sigma\sqrt{K} \approx \log(1.16) = 0.15 \to K\sigma\sqrt{K} \approx 0.07$$

Dunque $x^5 - x^3 - 2x^2 + 1 < 0 \leftrightarrow K\sigma\sqrt{K} < 0.07$. Possiamo considerare questa condizione soddisfatta, poichè è abbastanza improbabile che i tassi possano variare tra il generico t_n e t_{n+1} di più di 7 punti percentuali. Quindi vale che:

$$\exp(2K\sigma\sqrt{K}) + \exp(4K\sigma\sqrt{K}) - \exp(10K\sigma\sqrt{K}) >$$
$$\exp(-4K\sigma\sqrt{K}) + \exp(-2K\sigma\sqrt{K}) - \exp(4K\sigma\sqrt{K})$$

Dunque possiamo concludere con questa proposizione:

Proposizione 1.4 (Vincoli su $p(0,t_3)$). *Per l'assenza di arbitraggio, $p(0,t_3)$ deve soddisfare a queste condizioni (che dipenderanno anche da $p(0,t_2)$):*

$$\exp(K(-3r_0 - 4\sigma\sqrt{K})) + \exp(K(-3r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) - \tag{1.19}$$
$$\exp(K(-3r_0 + 4\sigma\sqrt{K})) < \mu p(0,t_3) < \exp(K(3r_0 - 4\sigma\sqrt{K}))$$

La ricerca di μ affinchè i pesi di probabilità soddisfino ad (1.10) è rimandata in Appendice con i seguenti dati:

$$B_3 = 3; \quad A_3 = \frac{\exp(2K\sigma\sqrt{K})}{\exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1}; \quad \mu_3 = \frac{\mu}{\exp(8K\sigma\sqrt{K}) - 1)}$$

Possiamo dunque riassumere quanto detto in questa sezione con questa proposizione:

Proposizione 1.5 (Martingala nei tassi di interesse)**.** *In un evoluzione binomiale dei tassi di interesse con la seguente dinamica:*

$$r_{t_{i+1}} = \begin{cases} r_{t_i} + \sigma\sqrt{K} & \textit{con probabilità } q_{t_{i+1}} \\ r_{t_i} - \sigma\sqrt{K} & \textit{con probabilità } 1 - q_{t_{i+1}} \end{cases} \tag{1.20}$$

una misura martingala equivalente Q è caratterizzata dai seguenti pesi:

$$q_{t_i} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \mu\ p(0,t_i)\exp(K(i+1)r_{t_i})}{\exp(2i^2 K\sigma\sqrt{K}) - 1} \tag{1.21}$$

con μ determinato imponendo che valga (1.10)*.*

Notiamo che la salita o la discesa dei tassi nel generico periodo t_{i+1} dipende non tanto dal percorso seguito, ma solo da dove ci troviamo all'istante precedente. In altre parole, questo processo stocastico gode della proprietà di Markov: se sappiamo dove ci troviamo, il futuro è indipendente dal passato.

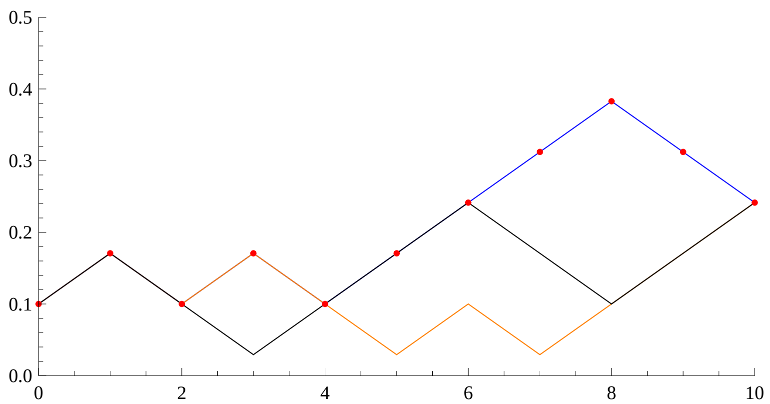

Figura 1.2: Tre andamenti casuali dei tassi generati tramite il programma *Mathematica* con parametri assegnati

Capitolo 2

Struttura del problema

Come specificato nel paragrafo precedente, l'insieme dei tempi in cui verranno prese le decisioni sarà: $I = \{\{t_0, t_1...t_N\} \,|t_i = t_{i-1} + K\}$, con $K > 0$ che verrà scelto arbitrariamente. Come specificato nell'introduzione, i titoli di Stato sono obbligazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per accumulare liquidità e possono essere emessi sopra o sotto la pari, oppure alla pari, ovvero a valore nominale. Nel nostro modello semplificheremo un po' la questione supponendo che possano essere emessi solo due categorie di titoli ovvero i BOT e i BTP e che entrambe le categorie vengano emesse alla pari, ovvero con valore nominale uguale ad 1, e che alla maturità lo Stato restituisca il valore nominale più gli interessi. Ipotizziamo inoltre che gli interessi dei BOT vengano pagati secondo la capitalizzazione composta, ovvero che per un BOT a scadenza in t_n e acquistato in t_m il *fattore di capitalizzazione* sia dato da:

$$\phi_{t_n}(t_m) = \sum_{j=m}^{n-1} \exp(Kr_{t_j}) \tag{2.1}$$

con r_{t_j} che rappresenta i tassi di interesse al tempo t_j e che può variare come nella formula (1.20). Per i BTP invece, verrà pagata una cedola fissa ad ogni t_i in cui il bond è in vita e alla scadenza verrà rimborsato il valore nominale del BTP oltre alla cedola. Supponendo che lo Stato emetta J diversi tipi di titoli, indicheremo con $d_{t_n,t_m} = (d^1_{t_n,t_m}, \ldots, d^J_{t_n,t_m})$ il vettore delle uscite al tempo t_n per un titolo emesso in t_m. Possiamo dunque rappresentare il costo del j-esimo titolo in t_n:

$$\begin{aligned} d^j_{t_n,t_m} &= \mathbf{1}_{A(n)}(j)\phi_{\alpha(n)}(m) + c^j_m \mathbf{1}_{B(n)}(j) = \\ &= \mathbf{1}_{A(n)}(j) \sum_{i=m}^{n} \exp(Kr_{t_i}) + c^j_m \mathbf{1}_{B(n)}(j) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$A(n) = \text{ l'insieme dei BOT che scadono al tempo } t_n;$$

$$B(n) = \text{l'insieme dei BTP che prevedono un pagamento di cedola al tempo } t_n;$$

$$c^j_m = \text{cedola da pagare al tempo } t_n \text{ per un BTP emesso al tempo } t_m.$$

Indicheremo inoltre, con C_n il costo che lo Stato dovrà avere nel generico nodo n. Per esempio C_{uuudd} rappresenterà il costo dello Stato nel caso i tassi di interesse siano saliti nei primi tre periodi e scesi negli ultimi due. Sarà chiaramente importante calcolare il costo nei nodi finali dell'albero, ovvero per ogni nodo $n \in N_{t_H}$ perchè l'obiettivo del modello è quello di emettere titoli minimizzando i costi al tempo t_H.

La cedola non può essere chiaramente arbitraria, poichè un valore troppo alto o troppo basso porterebbe il compratore a investire o a scartare completamente quel BTP. Abbiamo che il valore della cedola per un BTP emesso in t_m che scade in t_n vale:

$$1 = Kc_m^j \sum_{i=m+1}^{n-1} p\left(t_m, t_i\right) + \left(1 + Kc_m^j\right) p\left(t_m, t_n\right)$$

dunque:

$$c_m^j = \frac{1 - p(t_m, t_n)}{K \sum_{j=m+1}^{n} p(t_m, t_j)} \tag{2.3}$$

Infatti si ha che in corrispondenza alle scadenze $t_{m+1}, \ldots, t_{n-1}$ la cedola viene replicata con il prezzo di un T-bond alla scadenza e invece alla maturità verrà rimborsato il valore nominale del BTP acquistato in t_m in aggiunta al valore di un T-bond.

2.1 Misure di rischio, VaR e CVaR

Nell'ambito della finanza matematica sono stati elaborati molti metodi e modelli teorici per la valutazione dei rischi connessi ad operazioni finanziarie. Sono diventate importanti le cosidette misure di rischio *coerenti* che secondo i più esperti del settore hanno dei requisiti, a loro giudizio, fondamentali per una misura di rischio. Alcune posizioni finanziare, anche se godono di elevate probabilità di guadagno, possono portare a perdite troppo elevate per giustificare una loro apertura. Inoltre la correlazione tra diversi investimenti potrebbe portare ad una perdita maggiore rispetto all'investimento in un numero minore di titoli. Per esempio, una compagnia assicurativa prima di mettere in circolazione un nuovo pacchetto assicurativo deve prevedere se questo possa provocargli in futuro perdite inaspettate o troppo elevate. Una misura di rischio può essere dunque interpretata come una applicazione da un insieme $\mathcal{D}$ che potrebbe rappresentare tutte le possibili strategie a valori in $\mathbb{R}$.

Definizione 2.1 (Misura di rischio coerente)**.** Sia $\mathcal{D}$ l'insieme dei possibili investimenti. Una misura di rischio $\rho(z)$, $z \in \mathcal{D}$ si dice *coerente* se soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\begin{gathered} i)\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \rho(z+\alpha) = \rho(z) - \alpha \quad \text{invarianza per traslazioni} \\ ii)\ \forall \lambda > 0 \quad \rho(\lambda z) = \lambda \rho(z) \quad \text{omogeneità} \\ iii)\ z_1 \leq z_2 \rightarrow \rho(z_1) \leq \rho(z_2) \quad \text{monotonia} \\ iv)\ \rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2) \quad \text{subadditività} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Tutte queste proprietà hanno chiaramente un significato economico: la subadditivià indica il fatto che la somma di due rischi debba essere maggiore o uguale al rischio della somma (altrimenti, per esempio, non avrebbe senso aprire due o più posizioni su uno stesso conto, sapendo che rischieremmo di meno ad aprirle su due conti separati). In altre parole, tale proprietà indica come la diversificazione di portafoglio riduca il rischio di una perdita. L'invarianza per traslazioni indica come aggiungendo una posizione non aleatoria (rappresentata da α) si riduca il rischio esattamente della proporzione investita in quella posizione (potrebbe per esempio rappresentare l'investimento in un BOT a tasso fisso, che sappiamo già quanto renderà alla scadenza ed è un investimento detto *free risk*). Notiamo inoltre che $\rho(z+\rho(z)) = 0$: investendo una proporzione $\rho(z)$ su un titolo non rischioso, otteniamo un investimento a rischio nullo. Dobbiamo chiaramente introdurre una funzione che, dato un qualunque investimento, ne quantifichi la perdita e sulla quale poter poi applicare una misura di rischio che ci dica quanto rischioso è quell'investimento e decidere se effettuarlo o no. Un esempio concreto potrebbe essere il seguente: lo Stato può emettere due BOT, uno a rendimento fisso ed uno a rendimento dato dai tassi di interesse aleatori. Per minimizzare il rischio emetterebbe solo quelli a rendimento fisso (*free risk*), se invece decide di accettare un rischio θ perchè prevede che in futuro i tassi di interesse non salgano allora la disequazione $\rho(z) \leq \theta$ dice come emettere i BOT rischiando al massimo θ. Rappresenteremo la perdita come una funzione $z = f(x, Y)$ dove $x \in X$ possiamo intenderlo come un portafoglio al variare di tutti i possibili portafogli($x = (x^1, \ldots, x^J)$, x^i potrebbe rappresentare il numero di bond del tipo i-esimo emessi). Y invece rappresenterà una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$. Ne segue che anche la funzione perdita è una variabile casuale con distribuzione indotta da Y. Ipotizzeremo che la funzione $f(x, Y)$ sia lineare rispetto a x. Definiamo inoltre la funzione di ripartizione della perdita:

$$\Phi_z(t) := P(z \leq t) = P(f(x, Y) \leq t) \tag{2.5}$$

Introdurremo due misure di rischio legate fra di loro, una non coerente (non soddisfa alla subaddittività) ed una coerente che sarà quella che useremo nell'implementazione del modello.

Definizione 2.2 (Value at Risk (VaR))**.** Il VaR_β della perdita associata ad una decisione $x \in X$ è dato da:

$$VaR_\beta(z) = \min\{t|\Phi_z(t) \geq \beta\} \tag{2.6}$$

Dato un livello di confidenza β il VaR rappresenta la minima quantita t tale che, con probabilità almeno β la perdita non è superiore a t. La perdita va riferita ad un orizzonte temporale, per esempio la perdita giornaliera o mensile: se il VaR giornaliero di una società di mercato è 10.000 euro con un livello di confidenza $\beta = 0.95$ vuol dire che la società si aspetta con probabilità almeno del 95% di non perdere più di 10.000 euro. Il problema è che il VaR non ci dice cosa può succedere con probabilità del 5%. Ovvero potrebbe essere che la perdita, anche se con probabilità molto bassa, possa essere molto superiore ai 10.000 euro e quindi il VaR potrebbe quantificare nella stessa maniera due investimenti che però si discostano notevolmente nei casi peggiori. Per ridurre al minimo i casi che non vengono quantificati dal VaR, in genere viene usato con un livello di confidenza del 99%.

Proposizione 2.1 (VaR non è una misura di rischio coerente). *Il* VaR_β *non è una misura di rischio coerente, in particolare non vale che:*

$$\mathrm{Var}_\beta(z+w) \leq \mathrm{VaR}_\beta(z) + \mathrm{VaR}_\beta(w) \quad \forall z, w \in \mathcal{D} \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Mostriamo un caso concreto in cui vale la disuguaglianza opposta. Supponiamo che un istituzione finanziaria compri due BOT alla pari di due Stati diversi e che ogni Stato abbia probabilità $p = 0.009$ di fallire e dunque di non restituire nulla alla scadenza. Sia dunque X e Y la perdita dell'istituzione e in particolare $X, Y \sim B(1,p)$ dove $X = 1$ o $Y = 1$ vuol dire che lo Stato fa default durante la vita del BOT. Dunque, se $\beta = 0.99$, ne segue che:

$$\mathrm{VaR}_\beta(X) = \mathrm{VaR}_\beta(Y) = 0$$

Consideriamo ora la variabile aleatoria $X + Y \sim B(2,p)$. Abbiamo che $X + Y = 0$ con probabilità $(1-p)^2$, $X + Y = 2$ con probabilità p^2, $X + Y = 1$ con probabilità $2p(1-p)$. Poichè $2p(1-p) \approx 0.017$ e $(1-p)^2 = 0.98 < \beta$ ne segue che:

$$\mathrm{VaR}_\beta(X+Y) = 1 \geq \mathrm{VaR}_\beta(X) + \mathrm{VaR}_\beta(Y)$$

□

Ne segue che usando il VaR come misura di rischio, la diversificazione di portafoglio non porterebbe necessariamente ad un diminuzione del rischio di perdita. Per questo e anche per altri motivi (per esempio si può dimostrare che il VaR può non essere una funzione continua), è stata introdotta un'altra misura di rischio strettamente legata al VaR.

Definizione 2.3 (Conditional Value at Risk (CVaR)). Il CVaR_β della perdita associata ad una decisione $z \in X$ è dato da:

$$CVaR_\beta(z) = \int_{\mathbb{R}} t \; d\Psi_\beta(z,t) \tag{2.8}$$

dove $\Psi_\beta(z,t)$ è definita da:

$$\Psi_\beta(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se t} \leq Var_\beta(x) \\ \frac{\Phi_z(t)-\beta}{1-\beta} & \text{se } t > \mathrm{VaR}_\beta(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

Notiamo che il CVaR (che viene anche chiamato *expected shortfall*) rappresenta la media delle perdite che eccedono il VaR. Infatti per le perdite t minori del VaR il valore atteso vale 0, ed inoltre il valore atteso viene fatto tenendo conto della *coda* β di $f(x,Y)$. Infatti (2.09) è la funzione di distribuzione ottenuta 'appiattendo' la parte del grafico della distribuzione originale tra le linee orizzontali di livello $1-\beta$ e β in maniera tale che Ψ possa variare in $(0,1)$ Facendo un esempio analogo a quello precedente, se il CVaR giornaliero di una società è 10.000 ed il VaR è 8.000 con un livello di confidenza $\beta = 0.95$ ne segue che con probabilità almeno del 95% quel giorno non perderà più di 8.000 e il valor medio delle perdite eccedenti a 8.000 (quindi in quel 5% dei casi) è 10.000. Dunque è importante per una qualsiasi società, dati due investimenti a parità di VaR, effettuare quello con il minimo CVaR, per coprirsi da perdite elevate, sebbene poco probabili.

Il CVaR gode di molte proprietà matematiche. Vale infatti che:

Proposizione 2.2 (Coerenza). *Il* CVaR *è una misura di rischio coerente, ovvero soddisfa a tutte le proprietà di* (2.4)

Di conseguenza è una buona misura di rischio ed è largamente usata nel mercato per gestire gli investimenti. Ha inoltre un'altra proprietà importante, che è quella di convessità. Vale infatti che, definita la seguente funzione su $X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$G_\beta(x,t) = t + \frac{1}{1-\beta} E[[f(x,Y) - t]^+] \tag{2.10}$$

si ha che:

Teorema 2.3 (Convessità del CVaR). *La funzione definita in* (2.9) *è convessa e vale che:*

$$CVaR_\beta(x) = \min_{t \in \mathbb{R}} G_\beta(x,t) \tag{2.11}$$

Non dimostreremo tale teorema però vediamo come abbiamo una formula che ci permetta abbastanza agevolmente di trovare il CVaR e anche di poterlo minimizzare. Vale infatti che per minimizzare il CVaR bisogna minimizzare $G_\beta(x,t)$ prima rispetto a t e successivamente rispetto a x. A tempo discreto il valor medio sarà sostituito dalla sommatoria dei possibili valori della perdita moltiplicati per le rispettive probabilità. In formule, avremmo che, se Y potrà assumere dei valori $y_1 \dots y_J$ con probabilità $p_1 \dots p_J$ si ha che:

$$G_\beta(x,t) = t + \frac{1}{1-\beta} \sum_{j=1}^{J} [f(x,y_j) - t]^+ p_j \tag{2.12}$$

Lavorare con i moduli può essere molto scomodo se vogliamo fare operazioni di minimizzazione. Per questo si cerca di portare il problema in un problema lineare per poter poi usare metodi di programmazione lineare.

Si introducono dunque le variabili ausiliarie positive $\lambda_1 \dots \lambda_J$ e si trasforma il problema in:

$$C_\beta(\lambda_1 \dots \lambda_J, t) \;\; := \;\; t + \frac{1}{1-\beta} \sum_{j=1}^{J} \lambda_j p_j \tag{2.13}$$

$$\lambda_i > f(x,y_i) - t \quad 1 \leq i \leq J$$

$$\lambda_i > 0 \quad 1 \leq i \leq J$$

Definita la misura di rischio coerente che andremo ad usare, dobbiamo definire la funzione perdita $f(x,Y)$ dove nel nostro caso Y è il processo stocastico dei tassi di interesse, ovvero $R = \left\{ r_{t_j} \right\}_{t_j \in I}$. In generale la funzione perdita può essere definita a seconda delle esigenze, potrebbe rappresentare la deviazione da un valore deterministico oppure lo scarto quadratico medio dei costi nei nodi finali. Nel nostro contesto, seguendo quanto fatto in [2] definiremo la funzione perdita come:

$$L_n = C_n - E[C] \tag{2.14}$$

Dove C_n è il costo in uno dei nodi finali n, $n \in N_{t_H}$ ed $E[C]$ è il valor medio di tutti i possibili costi nei nodi finali.

Nell'implementazione del nostro modello, verrà usata la probabilità uniforme su Y, ovvero:

$$p_j = \frac{1}{|\mathcal{N}_{t_H}|} \quad j = 1, \cdots, J$$

Capitolo 3

Modello di emissione di BOT e BTP

Esponiamo ora il caso generale del modello che andremo poi ad approfondire nel caso $H = 2, 3$. Il Ministero del Tesoro, per coprirsi da un debito precedentemente accumulato che quantificheremo con K_0, emette alla pari H titoli, in particolare un BOT a scadenza in t_1 e $H-1$ BTP a scadenza in $t_2, \dots, t_H$ che prevedono il pagamento di cedole negli istanti intermedi. Ad ogni istante di tempo $t_i, \quad i \leq H-1$ ha dei pagamenti da effettuare (dati dalle cedole e dai titoli in scadenza). Per ovviare a questa perdita, emette in ogni periodo altri BOT e BTP. In particolar modo, detto O_{t_n} il debito da coprire al tempo t_n e detti $(u^1_{t_n}, \dots u^J_{t_n})$ la quantità di titoli che viene emessa in t_n deve valere la seguente relazione:

$$\sum_{j=1}^{J} u^j_{t_n} = O_{t_n} \tag{3.1}$$

L'obiettivo del modello è quello di trovare le emissioni ottimali in maniera da minimizzare il costo medio $E[C]$ che dovrà sostenere in t_H al variare dell'andamento dei tassi di interesse. Imporremo inoltre un vincolo sul CVaR definito in (2.13), per evitare così il rischio di perdite elevate. Vediamo in dettaglio cosa succede con $H = 2, 3$.

3.1 Scenario a due periodi

Il Ministero del Tesoro può emettere alla pari al tempo t_0 un BOT con scadenza in t_1 e un BTP con scadenza in t_2 che prevede il pagamento di cedola in t_1. Al tempo t_1 avrà delle spese derivanti da queste emissioni che copre con un ulteriore emissione di BOT a scadenza in t_2. Il suo obiettivo è quello di emetterli in quantità tale da minimizzare il costo medio finale che dovrà sostenere al tempo t_2.

Rappresenteremo dunque questo modello come segue:

$$u^1 = \text{ numero di BOT emessi}$$

$$u^2 = \text{ numero di BTP emessi}$$

Poichè i titoli sono emessi alla pari, ne segue che $u^1 + u^2 = K_0$. Per come abbiamo definito la cedola in (2.3) abbiamo che:

$$c_0^2 = \frac{1 - p(0, t_2)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0, t_2))} \tag{3.2}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (1.10), $p(0, t_1) = E^Q[\exp(-Kr_0)] = \exp(-Kr_0)$.

Ricordando le definizioni date nel paragrafo precedente, abbiamo che

$$d_{u,0}^1 = \exp(Kr_0)$$

$$d_{u,0}^2 = c_0^2$$

Notiamo che il costo dei pagamenti dei bonds dipende solo dal tasso di interesse iniziale e non da quello in t_1. Infatti per come è costruito il modello, la quantità del rimborso/pagamento della cedola in un generico nodo n, $n \in N_{t_i}$ dipende dai tassi di interesse che vi sono stati fino ad $\alpha(n)$ e dunque sarà lo stesso per tutti i figli $c(\alpha(n))$. Ne segue dunque che i costi in t_1 saranno gli stessi anche se i tassi sono scesi, dunque $d_{u,0}^i = d_{d,0}^i, \quad i = 1, 2$ Al tempo t_1 il Ministero dovrà rimborsare i titoli che scadono e dovrà pagare la cedola dei titoli che scadono nel periodo successivo. Per questi motivi, la quantità dei titoli che il Ministero dovrà emettere sarà:

$$u^3 = d_{u,0}^1 u^1 + d_{u,0}^2 u^2 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2 u^2$$

Alla fine del secondo periodo bisognerà rimborsare questi ultimi titoli e quelli emessi al tempo t_0. Supponendo che tra $[t_1, t_2]$ i tassi di interesse siano saliti abbiamo che, detto C_{uu} il costo finale in questo scenario, si ha:

$$d_{uu,0}^2 = 1 + c_0^2$$

$$d_{uu,0}^3 = \exp(Kr_u) = \exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))$$

e dunque:

$$\begin{gathered} C_{uu} = u^3 d_{uu,u}^3 + u^2 d_{uu,0}^2 = \\ \exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))(\exp(Kr_0)u^1 + c_0^2 u^2) + (1 + c_0^2)u^2 = \\ \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0^2 + 1 + c_0^2)u^2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Per il ragionamento sopra fatto, il costo dello Stato non cambia se tra $[t_1, t_2]$ i tassi sono scesi, ne segue che $C_{uu} = C_{ud}$.

Inoltre, per come è stata definita la misura di probabilità in (1.6), C_{uu} ha probabilità $q_u q_{uu}$ di potersi verificare, mentre C_{ud} ha probabilità $q_u(1 - q_{uu})$ di potersi verificare. Poichè $C_{uu} = C_{dd}$ vuol dire che il costo:

$$\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0^2 + 1 + c_0^2)u^2$$

si verifica con probabilità $q_u q_{uu} + (1 - q_{uu})q_u = q_u$, definita in (1.11). Indicheremo, per semplicità, questo costo con C_{uu}, sapendo però che è equivalente a C_{ud}.

Se i tassi sono scesi tra $[t_1, t_2]$, si ha che:

$$d^2_{dd,0} = 1 + c^2_0$$

$$d^3_{dd,d} = \exp(Kr_d) = \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

e dunque il costo totale per questo scenario è:

$$C_{dd} = u^3 d^3_{dd,d} + u^2 d^2_{dd,0} =$$
$$\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))(\exp(Kr_0)u^1 + c^2_0 u^2) + (1 + c^2_0)u^2 =$$
$$\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^1 + (\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))c^2_0 + 1 + c^2_0)u^2 \tag{3.4}$$

Per il ragionamento fatto prima, vale $C_{dd} = C_{du}$, e inoltre questo costo da parte dello Stato si verifica con probabilità $1 - q_u$.

Notiamo che $C_{uu} > C_{dd}$ poichè al crescere dei tassi di interesse cresce anche il costo da rimborsare. Supponiamo che il Ministero del Tesoro voglia minimizzare il costo medio che dovrà sostenere in t_2, ovvero $E^P[C]$

$$E^P[C] = \frac{C_{ud} + C_{uu} + C_{du} + C_{dd}}{4} = \frac{C_{uu} + C_{dd}}{2} \tag{3.5}$$

Manca il vincolo sul CVaR. Poichè $u^1 + u^2 = K_0$ possiamo porre $u^1 = j$ e $u^2 = K_0 - j$ e dunque far dipendere il CVaR solo da j.

Abbiamo che:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(j) = \min_{t\in\mathbb{R}} t + \frac{1}{2(1+\beta)}([C_{uu}(j) - E[C(j)] - t]^+ + [C_{dd}(j) - E[C(j)] - t]^+)$$

Poichè $C_{uu} > C_{dd}$, possono succedere solo tre tipi di scenari. Omettiamo per non appesantire la notazione la dipendenza di C da j (scriveremo semplicemente C_{ud} invece di $C_{ud}(j)$).

1)

$$C_{uu} - E[C] - t \le 0 \to C_{dd} - E[C] - t \le 0$$

e dunque in questo caso bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \mathrm{CVaR}_\beta(x) = \min_{t\in\mathbb{R}} t \\ C_{uu} - E[C] - t < 0 \leftrightarrow C_{uu} - C_{dd} - 2t < 0 \end{cases}$$

che da come soluzione:

$$\mathrm{CVaR}_\beta = C_{uu} - E[C] = \frac{C_{uu} - C_{dd}}{2} \tag{3.6}$$

e notiamo che non dipende dall'indice β di confidenza.

2)

$$C_{dd} - E[C] - t \ge 0 \to C_{uu} - E[C] - t \ge 0 \tag{3.7}$$

e dunque

$$\begin{cases} \mathrm{CVaR}_\beta = \min_{t\in\mathbb{R}} \ t - \frac{t}{1-\beta} \\ C_{dd} - E[C] > t \leftrightarrow C_{uu} - C_{dd} < -2t \end{cases}$$

Notiamo che nella prima equazione il coefficiente di t è positivo perchè $\beta \in (0,1)$. Dunque si ha che:

$$\mathrm{CVaR}_\beta = \frac{\beta}{1-\beta}(E[C] - C_{dd}) = \frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu} - C_{dd}) \tag{3.8}$$

3)

$$\begin{aligned} C_{uu} - E[C] - t > 0,\ C_{dd} - E[C] - t < 0 \leftrightarrow \\ C_{uu} - C_{dd} > 2t, \quad C_{dd} - C_{uu} < 2t \leftrightarrow \\ |2t| < C_{uu} - C_{dd} \end{aligned} \tag{3.9}$$

e dunque

$$\begin{cases} \mathrm{CVaR}_\beta = \min_{t \in \mathbb{R}}\ t + \frac{1}{(1-\beta)}(C_{uu} - E[C] - t) \\ C_{uu} - C_{dd} - 2t > 0 \\ C_{dd} - C_{uu} - 2t < 0 \end{cases}$$

Notiamo che in questo terzo caso, il valore di t dipende dal segno del coefficiente: se è negativo, allora per minimizzare dobbiamo prendere il valore più alto altrimenti quello più basso.

Possiamo riscrivere tale sistema come:

$$\begin{cases} \mathrm{CVaR}_\beta = \min_{t \in \mathbb{R}}\ \left(1 - \frac{1}{2(1-\beta)}\right) t + \frac{1}{(1-\beta)}[C_{uu} - E[C]] \\ C_{uu} - C_{dd} - 2t > 0 \\ C_{uu} - C_{dd} + 2t < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Si ha che

$$\left(1 - \frac{1}{2(1-\beta)}\right) > 0 \leftrightarrow \frac{1-2\beta}{2(1-\beta)} > 0 \leftrightarrow \beta < \frac{1}{2} \text{ o } \beta > 1$$

Poichè $\beta \in (0,1)$ ne segue che il coefficiente di t è positivo con $\beta \in (0, \frac{1}{2})$. Per questi valori di β per minimizzare la funzione bisogna prendere t più piccolo possibile, dunque $t_{\min} = C_{dd} - E[C] = \frac{C_{dd} - C_{uu}}{2}$. Se invece $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ allora sarà $t_{\min} = C_{uu} - E[C] = \frac{C_{uu} - C_{dd}}{2}$. Ne segue che otteniamo il seguente sistema:

$$\mathrm{CVaR}(j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_{uu} - C_{dd}), & \text{se } \frac{1}{2} < \beta < 1 \\ \frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu} - C_{dd}), & \text{se } 0 < \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

In definitiva, possiamo scrivere i possibili valori del CVaR:

$$\mathrm{CVaR}(j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)) & \text{se } C_{uu}(j) - C_{dd}(j) < 2t \\ \frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)) & \text{se } -2t > C_{uu} - C_{dd} \\ \frac{1}{2}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)), & \text{se } |2t| < C_{uu} - C_{dd} \text{ e } \frac{1}{2} < \beta < 1 \\ \frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)), & \text{se } |2t| < C_{uu} - C_{dd} \text{ e } 0 < \beta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vediamo che qualunque scenario succeda, minimizzare il CVaR vuol dire mininizzare la differenza tra i costi finali. Se $\beta \approx 1$ ne segue che il valore più alto del CVaR è dato dal secondo caso, e dunque il vincolo che aggiungeremo sarà il seguente:

$$\frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)) < \rho$$

Da tutte queste considerazioni, segue che il problema può essere scritto in questa forma:

$$\min_{0 \leq j \leq K_0} \quad \frac{C_{uu}(j) + C_{dd}(j)}{2}$$
$$r_u = r_0 + \sigma\sqrt{K};$$
$$r_d = r_0 - \sigma\sqrt{K}$$
$$\frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)) < \rho$$

Cerchiamo ora una soluzione a questo problema. Riscriviamo i costi finali dello Stato in t_2 ricordando che $C_{uu} = C_{ud}, \quad C_{dd} = C_{du}$.

$$C_{uu} = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0^2 + 1 + c_0^2)u^2$$
$$\text{con probabilità } q_u$$
$$C_{dd} = \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^1 + (\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))c_0^2 + 1 + c_0^2)u^2$$
$$\text{con probabilità } 1 - q_u$$

Ipotizzeremo che $K \leq 1$ ovvero che la dinamica dei tassi si evolva al massimo di anno in anno. Cerchiamo di capire quando e se il coefficiente che moltiplica u^1 nei costi finali è maggiore del coefficiente che moltiplica u^2: infatti, ricordando che vale $u^1 + u^2 = K_0$, se in tutti e due i costi il coefficiente di u^1 è maggiore di quello di u^2 vuol dire che emettere i BOT comporta una spesa maggiore e dunque per minimizzare i costi bisogna emettere solo il BTP. Nel caso opposto, ovvero se il coefficiente di u^2 è maggiore in entrambi i casi del coefficiente di u^1 allora ha conviene emettere solo BOT per minimizzare il costo (tutto questo ragionamento viene fatto senza limite sull'indice di rischio che tratteremo successivamente). L'unica variabile in questo scenario (gli altri sono parametri che possono essere fissati arbitrariamente) è $p(0, t_2)$, il quale però deve soddisfare a dei vincoli affinchè q_u sia effettivamente una misura di probabilità. Infatti, riportando i risultati della proposizione (1.3), si deve avere che:

$$\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) < p(0, t_2) < \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) \tag{3.11}$$

Ricordiamo inoltre che $p(0, t_2)$ è il prezzo di un T-bond, ovvero di un contratto in t_0 che mi garantisce alla scadenza (nel nostro caso t_2) un'unità monetaria. Dunque è chiaro che $p(0, t_2) \in (0, 1)$ e inoltre al tempo iniziale il prezzo del T-bond è conosciuto poichè quotato sul mercato. Scrivendo r_{t_1} il tasso di interesse nel primo periodo (che può essere uguale a r_u o r_d) si ha che nei costi finali (C_{uu} e C_{dd}) il coefficiente di u^1 è maggiore del coefficiente di u^2 :

$$\exp(K(r_0 + r_{t_1})) \geq \exp(Kr_{t_1}))c_0^2 + c_0^2 + 1 \leftrightarrow$$

$$c_0^2 \leq \frac{\exp(K(r_0 + r_{t_1})) - 1}{\exp(Kr_{t_1}) + 1} \tag{3.12}$$

Il termine a destra può prendere solo due valori. Sia dunque h il termine con i tassi di interesse saliti, l il termine con i tassi di interesse scesi. In formule:

$$h = \frac{\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))) - 1}{\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + 1}$$

$$l = \frac{\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))) - 1}{\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1}$$

Notiamo che $h > l$ infatti:

$$\frac{\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))) - 1}{\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + 1} \geq \frac{\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))) - 1}{\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1} \leftrightarrow$$

$$(\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1)(\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - 1) \geq$$
$$(\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - 1)(\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + 1)$$

Svolgendo i prodotti si ottiene:

$$h \geq l \leftrightarrow \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) \geq \tag{3.13}$$
$$\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - \exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) \tag{3.14}$$

Questa disuguaglianza è sicuramente soddisfatta perchè il primo termine a sinistra è strettamente maggiore del primo termine di destra e il secondo termine di sinistra è strettamente minore sel secondo termine di destra.

Dunque abbiamo che, se $c_0^2 < l$ vuol dire anche che $c_0^2 < h$ e dunque che in tutti e due gli scenari vale che:

$$\exp(K(r_0 + r_{t_1})) \geq \exp(Kr_{t_1})c_0^2 + c_0^2 + 1$$

In questo caso conviene sicuramente emettere solo il BTP.

Se invece $c_0^2 > h$ allora implica che $c_0^2 > l$ e vuol dire che vale, per tutti e due i periodi, la disuguaglianza opposta:

$$\exp(K(r_0 + r_{t_1})) \leq \exp(Kr_{t_1})c_0^2 + c_0^2 + 1$$

e dunque significa che nei costi finali il coefficiente di u^2 è maggiore del coefficiente di u^1 e dunque per minimizzare i costi bisogna emettere in t_0 solo il BOT a scadenza in t_1. L'unica incognita è $p(0, t_2)$ quindi cerchiamo di esplicitarlo nelle disuguaglianze che determinano i due casi.

$$c_0^2 < l \quad \leftrightarrow \frac{1 - p(0, t_2)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0, t_2))} < l \leftrightarrow$$

$$p(0, t_2) > \frac{1 - Kl\exp(-Kr_0)}{1 + Kl}$$

Sostituiamo il valore di l e otteniamo:

$$p(0, t_2) > \frac{1 + \frac{-K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + K\exp(-Kr_0)}{1 + \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}}{1 + \frac{K\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - K}{1 + \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}}$$

Facendo un denominatore comune, raccogliendo i termini in comune e semplificandolo otteniamo:

$$p(0,t_2) > \frac{(1-K)\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))(1+K\exp(Kr_0))+1-K} \tag{3.15}$$

Cerchiamo di capire se $p(0,t_2)$ può essere maggiore della quantità di destra, soddisfacendo contemporaneamente a (3.11). Bisogna dunque risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} p(0,t_2) > \frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl} \\ \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) < p(0,t_2) < \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) \end{cases} \tag{3.16}$$

Si avrà che, se

$$\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl} > \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

allora il sistema non ha soluzione;

se

$$\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) < \frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl} < \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

allora per $p(0,t_2) \in (\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl}, \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})))$ conviene emettere solo BTP;

se invece

$$\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl} < \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K}))$$

allora conviene emettere sempre BTP per ogni valore di $p(0,t_2)$ soddisfacente a (3.11).

Andiamo a svolgere i conti:

$$\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl} > \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

$$\frac{1-\frac{K\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+1}}{1+\frac{K\exp(K(2r_0-\sigma\sqrt{K})-K}{\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+1}} > \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

$$(1-K)\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0) >$$
$$\exp(-Kr_0)+\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))+K-K\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

Raccogliendo a fattor comune $1-K$ e semplificandolo ($K \in (0,1)$) otteniamo che la disequazione precedente è soddisfatta $\leftrightarrow$:

$$\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+1-\exp(-Kr_0) > \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

Moltiplichiamo per $\exp(Kr_0)$ ed otteniamo in definitiva:

$$\exp(K(2r_0-\sigma\sqrt{K}))+\exp(Kr_0) > 1+\exp(K(-r_0+\sigma\sqrt{K})) \tag{3.17}$$

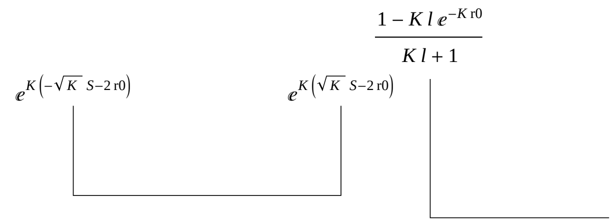

Figura 3.1: Questo è il caso in cui viene soddisfatta (3.17). La prima linea continua rappresenta i valori di $p(0, t_2)$ accettabili, mentre la seconda linea rappresenta i valori di $p(0, t_2)$ tali che $c_0^2 < l$.

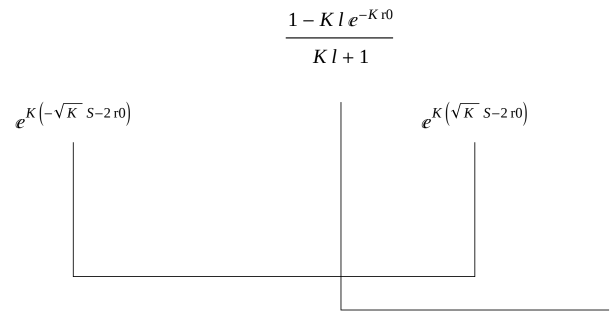

Figura 3.2: Questo è il caso in cui non viene soddisfatta (3.17) ma viene soddisfatta (3.18). Ci sono dei valori di $p(0, t_2)$ accettabili tale che $c_0^2 < l$ e tali per cui conviene emettere un portafoglio di soli BTP.

Questa disequazione è soddisfatta o meno in base alla scelta dei parametri σ, r_0, K. In particolare notiamo che la disequazione non viene soddisfatta con σ alto, invece con valori di σ piccolo potrebbe essere che $\exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) << 1$ e dunque la disequazione potrebbe essere verificata. Da tutto questo ragionamento segue che, se la disequazione è soddisfatta, allora il sistema (3.16) non ha soluzione, e dunque non esiste nessun valore accettabile di $p(0, t_2)$ tale che convenga emettere solo BTP per minimizzare il costo in entrambi gli scenari.

Vediamo ora il *lower-bound* per $p(0, t_2)$.

$$\frac{1 - Kl\exp(-Kr_0)}{1 + Kl} > \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

Saltiamo un po' di conti perchè quelli del primo membro sono gli stessi del conto precedente.

$$(1 - K)\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0) >$$

$$\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K}))(\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - K)$$

$$\leftrightarrow (1 - K)\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0) >$$

$$(1 - K)\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) + \exp(K(-r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + K\exp(-2K\sigma\sqrt{K})$$

Moltiplicando per $\exp(Kr_0)$ otteniamo:

$$\leftrightarrow (1 - K)\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) + \exp(Kr_0) + K >$$

$$(1-K)\exp(K(-r_0-\sigma\sqrt{K}))+\exp(-K\sigma\sqrt{K})(1+\exp(Kr_0))$$

Raccogliamo il primo termine a sinistra e destra a fattor comune e otteniamo:

$$\leftrightarrow (1-K)\exp(-K\sigma\sqrt{K})(\exp(2Kr_0)-\exp(-Kr_0))+K+\exp(Kr_0)>$$

$$\exp(-2K\sigma\sqrt{K})(1+\exp(Kr_0))$$

Portiamo a destra $\exp(Kr_0)$ e lo raccogliamo a fattor comune. La disequazione precedente diventa:

$$(1-K)\exp(-K\sigma\sqrt{K})(\exp(2Kr_0)-\exp(-Kr_0))> \tag{3.18}$$

$$\exp(Kr_0)(\exp(-2K\sigma\sqrt{K})-1)-K+\exp(-2K\sigma\sqrt{K})$$

Anche questa disequazione dipende dalla scelta dei parametri; notiamo che se σ è piccolo allora la disequazione può non essere soddisfatta, invece al crescere di σ sarà soddisfatta (si può notare che il primo membro è sempre positivo). Riassumendo quanto si è trovato fino ad ora si ha che:

Se vale (3.17) allora vale (3.18) e di conseguenza il sistema (3.16) non ha soluzione. Dunque non esiste un valore di $p(0,t_2)$ accettabile tale che valga che $c_0^2<l$ e questo significa che in tutti gli scenari possibili $(C_{uu},C_{dd},C_{ud},C_{du})$ il coefficiente di u^1 (u^1 che rappresenta il numero di BOT emessi al tempo t_0) non sarai mai sempre maggiore del coefficiente di u^2, ovvero dei BTP emessi al tempo iniziale.

Se invece non vale (3.17) e vale (3.18) allora esiste un intervallo per $p(0,t_2)$ dato da $(\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl},\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})))$ nel quale conviene emettere solo BTP perchè qualunque scenario si verificherà, si avrà che il coefficiente di u^1 è maggiore di quello di u^2.

Se invece non vale (3.18) non vale neanche (3.17) allora per ogni valore di $p(0,t_2)$ accettabile (ovvero tale che q_u sia una misura di probabilità), dunque soddisfacente a (3.11) conviene emettere solo i BTP per minimizzare i costi in qualunque scenario possibile.

Vediamo, analogamente, quando e se $c_0^2>h$.

$$c_0^2\geq h\leftrightarrow\frac{1-p(0,t_2)}{K(\exp(-Kr_0)+p(0,t_2))}>h\leftrightarrow$$

$$1-p(0,t_2)>Kh\exp(-Kr_0)+Khp(0,t_2)\leftrightarrow$$

$$p(0,t_2)<\frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh}$$

E sostituendo h otteniamo:

$$p(0,t_2)<\frac{1+\frac{-K\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+K\exp(-Kr_0)}{1+\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))}}{1+\frac{K\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))-K}{1+\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))}}$$

$$p(0,t_2)<\frac{(1-K)\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))(1+K\exp(Kr_0))+1-K} \tag{3.19}$$

Questa condizione va posta insieme a (3.11) che rappresenta i valori di $p(0,t_2)$ accettabili. Con una analisi abbastanza similare al caso precedente, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{cases} p(0,t_2) < \frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+hl} \\ \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) < p(0,t_2) < \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) \end{cases} \tag{3.20}$$

Il sistema avrà soluzione se $\frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+hl} > \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K}))$ e avrà esattamente (3.11) come soluzione se $\frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+hl} > \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$. Ne segue che, se il sistema ha soluzione, esiste un valore di $p(0,t_2)$ tale che conviene emettere solamente BOT per minimizzare il costo in un qualunque scenario possibile. Cerchiamo delle espressioni più chiare come nel caso precedente.

$$\frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh} > \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

$$\frac{1-\frac{K\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1}}{1+\frac{K\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))-K}{\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1}} > \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

$$\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1-K\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+K\exp(-Kr_0) >$$
$$\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K}))(\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1-K+K\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K})))$$
$$\leftrightarrow (1-K)\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0) >$$
$$\exp(-Kr_0)+\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K}))+K-K\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K}))$$

Raccogliendo a fattor comune e semplificando $1-K>0$ otteniamo la disequazione precedente se e solo se:

$$1+\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))-\exp(-Kr_0) \geq \exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})) \tag{3.21}$$

Notiamo che questa disequazione è sempre soddisfatta per ogni scelta (positiva) dei parametri e se $K \neq 1$. Infatti il termine a destra è sempre minore di 1, invece quello a sinistra è sempre maggiore di 1 poichè $\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K})) - \exp(-Kr_0) > 0$. Questo vuol dire che esistono sempre soluzioni accettabili per il sistema (3.20).

Analogamente, verifichiamo l' *upper-bound* del sistema.

$$\frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh} > \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$

$$\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1-K\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+K\exp(-Kr_0) >$$
$$\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))(\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1-K+K\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K})))$$
$$\leftrightarrow (1-K)\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0) >$$
$$\exp(K(-r_0+2\sigma\sqrt{K}))+\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))+K\exp(2K\sigma\sqrt{K})-$$
$$K\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

Raccogliamo alcuni termini a fattore comune. La disequazione precedente diventa dunque:

$$(1-K)\exp(K(r_0+\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-Kr_0) >$$

$$(1-K)\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))+\exp(2K\sigma\sqrt{K})(\exp(-Kr_0)+K)) \quad (3.22)$$

In questo caso, invece, la disequazione è soddisfatta o meno in base alla scelta dei parametri.

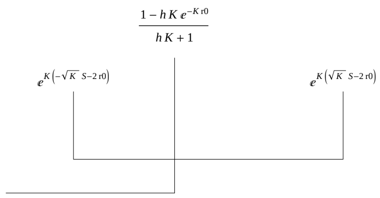

Figura 3.3: Questo è il caso in cui non viene soddisfatta (3.22). Esistono dei valori accettabili per $p(0,t_2)$ per i quali vale che $c_0^2 > h$ e dunque conviene emettere un portafoglio di soli BOT.

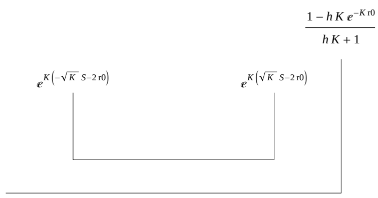

Figura 3.4: Questo è il caso in cui viene soddisfatta (3.22). Per tutti i valori accettabili di $p(0,t_2)$ (e dunque, supponendo assenza di arbitraggio, per qualsiasi $p(0,t_2)$ scambiato sul mercato reale) per minimizzare i costi conviene emettere un portafoglio di soli BOT.

Dunque, i casi possibili sono solo due: Se (3.22) è soddisfatta, allora il sistema (3.20) ammette come soluzione accettabile proprio (3.11). Ne segue che per ogni valore accettabile di $p(0,t_2)$ conviene emettere solo BOT a scadenza in t_1, perchè qualunque scenario succeda ($C_{uu}, C_{dd}, C_{ud},$ o C_{du}) il coefficiente di u^1 sarà sempre minore del coefficiente di u^2. Se invece (3.22) non è soddisfatta, allora conviene emettere solo BOT a scadenza in t_1 se e solo se $p(0,t_2) \in \left(\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})), \frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh}\right)$.

I casi che non sono stati trattati o che comunque non indicano una dinamica certa per minimizzare il costo sono i seguenti:

$$i) \text{ se vale (3.17) e non vale (3.22) ma } p(0,t_2) \notin$$

$$(\exp(K(-2r_0-\sigma\sqrt{K})), \frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh});$$

$$ii) \text{ se non vale (3.17), vale (3.18) ma}$$

$$p(0,t_2) \notin (\frac{1-Kl\exp(-Kr_0)}{1+Kl}, \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K}))) \text{ e}$$

$$\text{non vale (3.22) ma } p(0,t_2) \notin (\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})), \frac{1 - Kh\exp(-Kr_0)}{1 + Kh}) \ ; \tag{3.23}$$

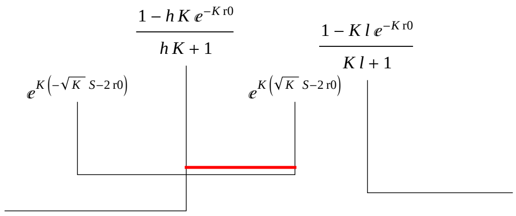

Figura 3.5: Rappresentazione grafica del caso *i*). Non vale (3.17), infatti non vi è intersezione tra i valori accettabili di $p(0,t_2)$ e i valori di $p(0,t_2)$ tali che $c_0^2 < l$. Non vale inoltre (3.22) e dunque per tutti quei valori di $p(0,t_2)$ evidenziati in rosso, non vi è una dinamica certa di portafoglio che consenta di minimizzare il costo dello Stato senza rischi. Bisogna ricorrere al CVaR per limitare una perdita elevata.

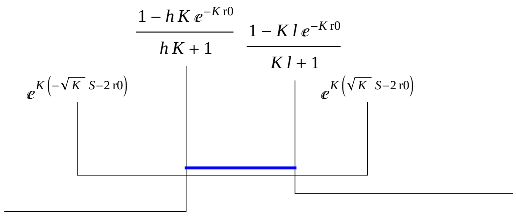

Figura 3.6: Rappresentazione grafica del caso *ii*. Vale (3.17) ma non (3.18) e inoltre non vale (3.22). Dunque, per i valori di $p(0,t_2)$ accettabili ed evidenziati con la linea blu, non vi è una dinamica di emissione *free-risk*

In questi casi avremmo che, a seconda del percorso seguito dai tassi, il coefficiente di u^1 può essere maggiore o minore del coefficiente di u^2. Di conseguenza potrebbe essere che emettere un portafoglio di soli BOT possa minimizzare i costi se i tassi di interesse salgono, oppure aumentarli se i tassi di interesse scendono. Ci esponiamo dunque ad un rischio che possiamo limitare tramite un vincolo sul CVaR. Ne segue che l'emissione di portafoglio viene decisa in base a quanto siamo disposti a rischiare. Mostriamo in figura (3.5) e (3.6) questi due casi.

Analizziamo il vincolo sul CVaR ovvero:

$$\frac{\beta}{2(1-\beta)}(C_{uu}(j) - C_{dd}(j)) < \rho$$

Definendo $\mu = \frac{2\rho(1-\beta)}{\beta}$ si ha che possiamo riscrivere il vincolo come:

$$C_{uu} - C_{dd} < \mu \tag{3.24}$$

Ricordando (3.3) e (3.4) abbiamo che il vincolo lo possiamo riscrivere come:

$$(\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})))u^1 +$$

$$(\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) - \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})))c_0^2 u^2 < \mu$$

Svolgiamo un po' di conti:

$$\exp(Kr_0)(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \exp(-K\sigma\sqrt{K}))u^1 +$$
$$(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \exp(-K\sigma\sqrt{K}))c_0^2 u^2 < \mu \exp(-Kr_0)$$

Ricordando che $u^1 = K_0 - u^2$ e dividendo per $\exp(K\sigma\sqrt{K}) - \exp(-K\sigma\sqrt{K}) > 0$ si ha che:

$$\exp(Kr_0)(K_0 - u^2) + c_0^2 u^2 < \mu \left(\frac{\exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} \right)$$

Esplicitando in u^2 si ha infine (e poichè $c_0^2 - \exp(Kr_0) < 0$)

$$u^2 > \frac{\frac{\mu \exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} - K_0 \exp(Kr_0)}{c_0^2 - \exp(Kr_0)} \tag{3.25}$$

Questo è il vincolo dato dal CVaR$_\beta$. Notiamo che, poichè $c_0^2 - \exp(Kr_0) < 0$ all'aumentare di ρ aumenta anche μ e di conseguenza diminuisce il termine a destra della disuguaglianza in (3.25). All'aumentare dell'indice di rischio diminuisce il vincolo su u^2 e dunque sembra che più accettiamo un rischio elevato, più dobbiamo investire su u^1.

Notiamo inoltre che la seguente disuguaglianza:

$$\frac{\frac{\mu \exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} - K_0 \exp(Kr_0)}{c_0^2 - \exp(Kr_0)} < K_0 \tag{3.26}$$

mette un vincolo sul CVaR minimo che esiste, ovvero il minimo rischio di un investimento (che è dato dall'emissione di soli BTP). Risolvendola in ρ otteniamo:

$$\mu > \frac{K_0 c_0^2 (\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1)}{\exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))} \leftrightarrow \tag{3.27}$$

$$\rho > \frac{\beta K_0 c_0^2 (\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1)}{2(1 - \beta)\exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))} \tag{3.28}$$

Notiamo altresì che per avere solo emissioni di BOT, occorre che il termine di destra della disuguaglianza in (3.25) sia non positivo, così da non vincolare ad emettere anche il BTP. Svolgendo un po' di conti, si ha che:

$$\frac{\mu \exp(K(-r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1} - K_0 \exp(Kr_0) = 0 \leftrightarrow$$

$$\mu = K_0 \exp(Kr_0) \frac{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1}{\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))} \leftrightarrow$$

$$\rho = \frac{\beta K_0 \exp(Kr_0)(\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1}{2(1 - \beta)(\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})))} \tag{3.29}$$

Questi vincoli sono da utilizzare, come già detto in precedenza, solo quando si verifica uno dei due casi in (3.23) perchè negli altri casi conosco già l'emissione ottimale. Possiamo dunque riassumere quanto detto con il seguente teorema:

Teorema 3.1 (Emissioni ottimali). *Per non arbitraggio, $p(0,t_2)$ verrà scambiato sul mercato con il seguente prezzo:*

$$\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) < p(0,t_2) < \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K}))$$

Inoltre valgono le seguenti condizioni:

1) se $\quad p(0,t_2) > \dfrac{(1-K)\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(Kr_0)) + 1 - K}$

allora l'emissione ottimale è data da: $u^1 = 0$ $u^2 = K_0$.

2) se $\quad p(0,t_2) < \dfrac{(1-K)\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(Kr_0)) + 1 - K}$

allora l'emissione ottimale è data da $u^1 = K_0$ *e* $u^2 = 0$.

3) Se $p(0,t_2)$ non soddisfa ad 1) o a 2), allora l'emissione ottimale è data dal rischio ρ che decidiamo di correre e in particolare il vincolo è dato da:

$$u^2 > \frac{\frac{2\beta\rho\exp(K(-r_0+\sigma\sqrt{K}))}{(1-\beta)(\exp(2K\sigma\sqrt{K})-1)} - K_0\exp(Kr_0)}{c_0^2 - \exp(Kr_0)}$$

Un paio di esempi numerici

Supponiamo che i tassi di interesse si evolvano con la seguente dinamica:

$$r_0 = 0.03; \quad \sigma = 0.01; \quad K = 0.5; \tag{3.30}$$

e che inoltre il debito arretrato sia $K_0 = 100$ e che $\beta = 0.95$. Cerchiamo l'emissione ottimale dei BOT/BTP che minimizzi il costo medio. I valori di $p(0,t_2)$ accettabili sono quelli che soddisfano a (3.11) ovvero:

$$0.967021 < p(0,t_2) < 0.973883$$

Vediamo quale punto del teorema (3.1) è soddisfatto. Sostituendo i dati numerici alla i) del teorema, otteniamo:

$$p(0,t_2) > 0.986855$$

che non può essere soddisfatta. Per quanto detto nella parte teorica, non esistono valori accettabili di $p(0,t_2)$ tali che convenga emettere un portafoglio di soli BTP. Vediamo se vale la ii) del teorema.

$$p(0,t_2) < 0.983372$$

La disequazione è verificata per ogni valore di $p(0,t_2)$ accettabile: per il teorema (3.1) in t_0 conviene emettere solo BOT per minimizzare il costo medio. Si avrà dunque che, se non vi è arbitraggio, il prezzo del T-bond a scadenza in t_2 sarà scambiato sul mercato con un valore che soddisfa alla disuguaglianza precedente. Lo Stato, per minimizzare il costo medio al tempo t_2 dovrà emettere, qualsiasi sia il valore del T-bond, solo BOT a scadenza in t_1 (e quindi in t_1 emettere ulteriori BOT a scadenza in t_2 che coprano il costo sostenuto tra $[t_1,t_2]$). Mostriamo quanto detto con le prossime Figure(3.7) (3.8).

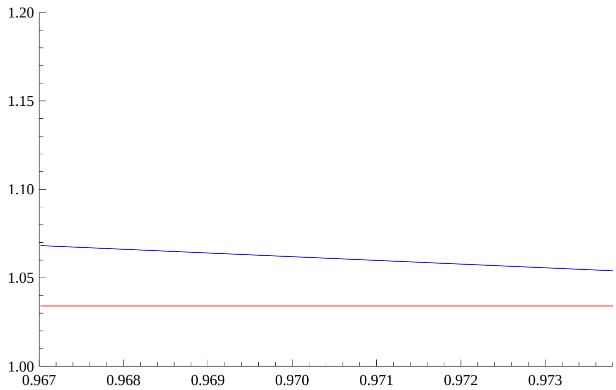

Figura 3.7: Confronto tra il coefficiente di u^1 (in rosso) e il coefficiente di u^2 al variare di $p(0, t_2)$ tra i valori ammissibili che può assumere nel caso $C_{uu} = C_{ud}$. Notiamo che la retta rossa è costante, perchè i costi per i BOT emessi non dipendono dalla cedola e dunque da $p(0, t_2)$. Quello che varia sono i costi per il BTP emessi e notiamo che i costi per il BTP sono sempre maggiori dei costi del BOT.

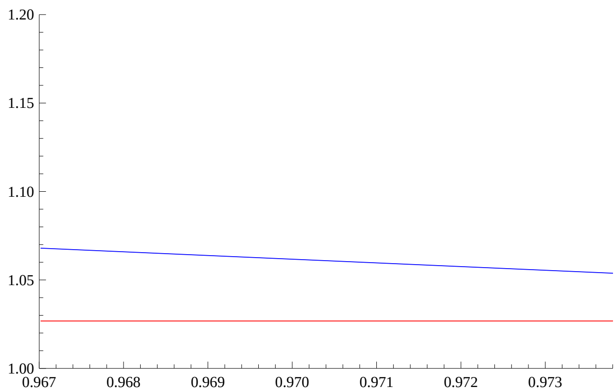

Figura 3.8: Figura simile a quella precedente solo che questa riguarda il caso $C_{dd} = C_{du}$. Notiamo anche dal grafico quello che abbiamo detto in teoria: in tutti e due i casi, sia che i tassi scendano sia che i tassi salgano, abbiamo che il costo dello Stato viene minimizzato emettendo solo BOT.

Se invece consideriamo che la variazione dei tassi di interesse avvenga ogni anno, ovvero $K = 1$, abbiamo che, i valori accettabili per $p(0, t_2)$ sono:

$$0.932394 < p(0, t_2) < 0.951229$$

La i) del teorema (3.1) diventa:

$$p(0, t_2) > 0.951229$$

e dunque è soddisfatta, quindi non esiste un valore accettabile di $p(0, t_2)$ tale per cui convenga emettere solo BTP. Analogamente, ii) diventa:

$$p(0, t_2) < 0.932394$$

che non è verificata. Questo è coerente con quanto trovato nella parte teorica, perchè con $K = 1$ la disequazione (3.21) non è soddisfatta (per ottenerla abbiamo diviso entrambi i membri per $1 - K$. Notiamo che con $K = 1$ e σ, r_0 generici si ha che $\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) = \frac{1-Kh\exp(-Kr_0)}{1+Kh}$. Abbiamo che:

$$\frac{1 - h\exp(-r_0)}{1 + h} = \frac{1 - \frac{\exp(r_0+\sigma)+\exp(-r_0)}{\exp(r_0+\sigma} + 1}{\exp(r_0 + \sigma) + 1 + \exp(2r_0 + \sigma) - 1}$$

Moltiplicando sopra e sotto per $\exp(Kr_0)$ si ottiene:

$$\frac{\exp(r_0) + 1}{\exp(2r_0 + \sigma)(1 + \exp(r_0))} = \exp(-2r_0 - \sigma)$$

Ne segue, per i ragionamenti fatti nella parte teorica, che non vi è un' emissione che minimizzi il costo medio per qualunque scenario possa accadere in t_2. La dinamica di emissione ottimale verrà dunque decisa, seguendo il teorema (3.1) dal rischio che decidiamo di correre. Vediamo più in dettaglio questa cosa, ponendo $p(0, t_2) = 0.955$ e facendo variare l'indice di rischio ρ. Sostituendo i dati numerici in (3.28) e (3.29) rispettivamente, si ha che:

$$\rho > 0.24042$$

$$\rho = 6.7652$$

Si ha dunque che il minimo rischio che corriamo è quantificato da 0.24042 e rappresenta un emissione di soli BTP. All'aumentare dell'indice di rischio, aumenta linearmente anche l'emissione dei BOT, fino ad un emissione totale dei BOT (dunque $u^1 = K_0$, $u^2 = 0$) con un indice di rischio che però vale 6.7652. Dunque, all'aumentare del rischio che decidiamo di assumere, aumentiamo l'emissione di BOT così come supposto nella parte teorica.

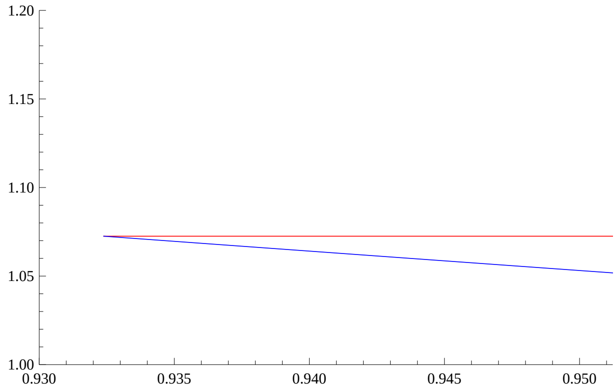

Figura 3.9: Figura che mostra l'andamento con la variazione annuale dei tassi nel caso $C_{uu} = C_{ud}$. Notiamo quanto abbiamo detto in teoria: se $p(0, t_2)$ vale 0.932394, allora emettere i BOT ha un costo minore di emettere i BTP.

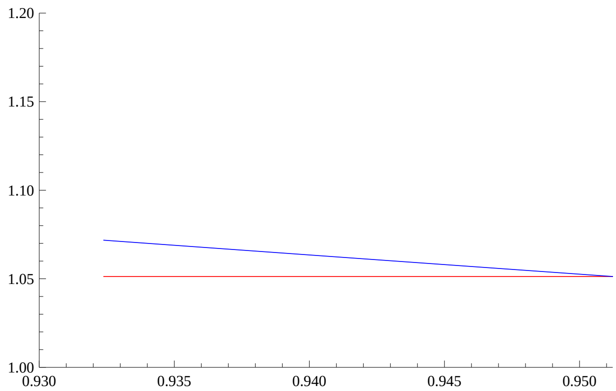

Figura 3.10: Figura che mostra l'andamento con la variazione annuale dei tassi nel caso $C_{dd} = C_{du}$

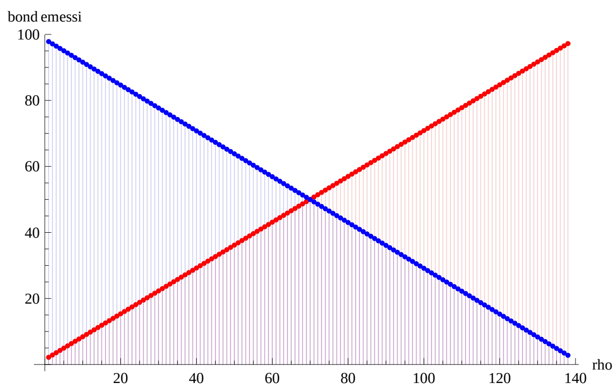

Figura 3.11: Grafico delle emissioni ottimali che minimizza il costo medio all'aumentare dell'indice di rischio sull'asse x (varia da 1 a 15 a passi di 0.1)

3.2 Modello a tre periodi

Il Ministero del Tesoro emette BOT con scadenza in t_1 e BTP con scadenza in t_2 e t_3 che prevedono il pagamento di cedola nei periodi precedenti alla scadenza. Al tempo t_1 per coprire l'ulteriore debito, emette BOT a scadenza successiva e BTP a scadenza in t_3. Nel penultimo periodo infine, emette BOT a scadenza in t_3. Definiamo con u^i, $1 \leq i \leq 3$ i titoli emessi in t_0 che scadono in t_i. Gli scenari possibili in questo caso sono 4.

$$\begin{aligned} r_{uu} &= r_u + \sigma\sqrt{K} = r_0 + 2\sigma\sqrt{K} \\ r_{ud} &= r_u - \sigma\sqrt{K} = r_0 \\ r_{du} &= r_d + \sigma\sqrt{K} = r_0 \\ r_{dd} &= r_d - \sigma\sqrt{K} = r_0 - 2\sigma\sqrt{K} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Scriviamo in maniera esplicita il valore delle cedole con cui andremo ad im-

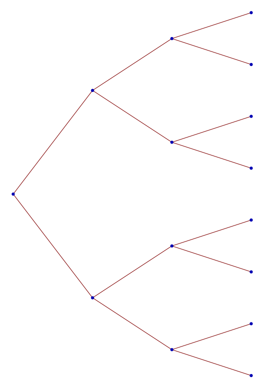

Figura 3.12: albero a tre periodi

plementare il modello, usando la (2.2). c_0^j rappresenta la cedola per il BTP j emesso in t_0 e a scadenza in t_2; c_0^k rappresenta la cedola per il BTP k emesso in t_0 e a scadenza in t_3; c_1^lrappresenta la cedola per il BTP l emesso in t_1 e a scadenza in t_3;

$$c_0^j = \frac{1 - p(0,t_2)}{K(p(0,t_1) + p(0,t_2))} = \frac{1 - p(0,t_2)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0,t_2))}$$

$$c_0^k = \frac{1 - p(0,t_3)}{K(p(0,t_1) + p(0,t_2) + p(0,t_3))} = \frac{1 - p(0,t_3)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0,t_2) + p(0,t_3))}$$

$$c_1^l = \frac{1 - p(t_1,t_3)}{K(p(t_1,t_2) + p(t_1,t_3))}$$

Notiamo che c_1^l dipende dall'evoluzione dei tassi di interesse nel primo periodo, dunque cambierà se tra $[t_0, t_1]$ i tassi di interesse sono saliti o scesi. Più in dettaglio, usando la (1.7) e la (1.10) useremo le seguenti notazioni:

$$p^u(t_1, t_n) = E^Q[D(t_1, t_n)|r_{t_1} = r_u]$$

$$p^d(t_1,t_n) = E^Q[D(t_1,t_n)|r_{t_1} = r_d]$$

Da queste notazioni, segue che:

$$p^u(t_1,t_2) = E^Q[\exp(-Kr_{t_1})|r_{t_1} = r_u] = \exp(-K(r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

$$p^d(t_1,t_2) = E^Q[\exp(-Kr_{t_1})|r_{t_1} = r_d] = \exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))$$

$$\begin{gathered} p^u(t_1,t_3) = E^Q[\exp(-K(r_{t_1}+r_{t_2}))|r_{t_1} = r_u] = \\ \exp(-K(r_0+\sigma\sqrt{K}))(q_{uu}\exp(-K(r_{uu})) + (1-q_{uu})\exp(-Kr_{ud})) = \\ \exp(-K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))(q_{uu}\exp(-2K\sigma\sqrt{K}) + (1-q_{uu})) \end{gathered} \tag{3.32}$$

Dunque abbiamo che:

$$p^u(t_1,t_3) = \exp(-K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))(q_{uu}\exp(-2K\sigma\sqrt{K}) + (1-q_{uu}))$$

Cerchiamo dei vincoli anche per questo T-bond. Essendo una misura di probabilità abbiamo che $q_{uu} \in (0,1)$. Notiamo inoltre che $p^u(t_1,t_3)$ è descrescente in q_{uu}, dunque:

$$q_{uu} > 0 \to p^u(t_1,t_3) < \exp(-K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))$$

$$q_{uu} < 1 \to p^u(t_1,t_3) > \exp(-K(2r_0+3\sigma\sqrt{K}))$$

Di consequenza ne segue che:

$$\exp(-K(2r_0+3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1,t_3) < \exp(-K(2r_0+\sigma\sqrt{K})) \tag{3.33}$$

Facciamo lo stesso con $p^d(t_1,t_3)$.

$$\begin{gathered} p^d(t_1,t_3) = E^Q[\exp(-K(r_{t_1}+r_{t_2}))|r_{t_1} = r_d] = \\ \exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))(q_{du}\exp(-K(r_{du})) + (1-q_{du})\exp(-Kr_{dd})) = \\ \exp(-K(2r_0-\sigma\sqrt{K}))(q_{du} + (1-q_{du})\exp(2K\sigma\sqrt{K})) \end{gathered} \tag{3.34}$$

Dunque:

$$p^d(t_1,t_3) = \exp(-K(2r_0-\sigma\sqrt{K}))(q_{du} + (1-q_{du})\exp(2K\sigma\sqrt{K}))$$

Anche il valore di questo T-bond è descrescente in q_{du}. Ne segue che:

$$q_{du} > 0 \to p^d(t_1,t_3) < \exp(-K(2r_0-3\sigma\sqrt{K}))$$

$$q_{du} < 1 \to p^d(t_1,t_3) > \exp(-K(2r_0-\sigma\sqrt{K}))$$

Dunque:

$$\exp(-K(2r_0-\sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1,t_3) < \exp(-K(2r_0-3\sigma\sqrt{K})) \tag{3.35}$$

Riassumiamo questi risultati con un teorema.

Teorema 3.2 (Vincoli sui T-bond emessi in t_1). *Per il non arbitraggio, i prezzi dei T-bond emessi in t_1 e a scadenza in t_3 devono soddisfare alle seguenti*

i) *Se tra $[t_0, t_1]$ i tassi sono saliti, allora:*

$$\exp(K(-2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

ii) *Se tra $[t_0, t_1]$ i tassi sono scesi, allora:*

$$\exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))$$

Indicheremo inoltre con c_u^l la cedola in t_1 del BTP l a scadenza in t_3 nel caso i tassi di interesse siano saliti nel primo periodo e con c_d^l nel caso siano scesi. Si ha dunque:

$$c_u^l = \frac{1 - p^u(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + p^u(t_1, t_3))} \tag{3.36}$$

$$c_d^l = \frac{1 - p^d(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + p^d(t_1, t_3))} \tag{3.37}$$

Scenario relativo ai tassi r_{uu}

Al tempo t_1 i pagamenti da effettuare sono dati dal BOT scaduto e dalle cedole per i titoli a scadenza successive. Dunque, il Ministero emette BOT in quantità u_4 e scadenza in t_2 e BTP in quantità u_5 a scadenza in t_3.

$$\begin{aligned} d_{u,0}^1 &= \exp(Kr_0) \\ d_{u,0}^2 &= c_0^2 \\ d_{u,0}^3 &= c_0^3 \\ u^4 + u^5 = u^1 d_{u,0}^1 &+ d_{u,0}^2 u^2 + u^3 d_{u,0}^3 = \\ &\exp(Kr_0)u^1 + c_0^2 u^2 + c_0^3 u^3 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Notiamo che le emissioni di bonds al tempo t_1 dipendono solo dal tasso di interesse iniziale. Ne segue che saranno le stesse anche nel caso i tassi di interesse scendono tra $[t_0, t_1]$. Questo ragionamento porta a concludere che $d_{u,0}^i = d_{d,0}^1, \quad 1 \le i \le 3$.

Tra $[t_1, t_2]$ il pagamento riguarderà le obbligazioni che scadono in t_2 (sia i BTP emessi in t_0 che i BOT emessi in t_1) e la cedola per i BTP che scadono nel periodo finale. Verranno emessi dunque ulteriori BOT con scadenza in t_3.

$$\begin{aligned} d_{uu,0}^2 &= 1 + c_0^2 \\ d_{uu,0}^3 &= c_0^3 \\ d_{uu,u}^4 &= \exp(Kr_u) \\ d_{uu,u}^5 &= c_u^5 \\ u^6 = u^4 d_{uu,u}^4 + d_{uu,0}^2 u^2 &+ u^3 d_{uu,0}^3 + d_{uu,u}^5 u^5 = \end{aligned}$$

$$\exp(Kr_u)u^4 + c_u^5 u^5 + c_0^3 u^3 + (1 + c_0^2)u^2 \tag{3.39}$$

Le spese dello Stato al tempo t_3 saranno date dai BTP che scadono e dal BOT emesso in t_2 che scade.

$$d^5_{uuu,u} = 1 + c_u^5$$

$$d^3_{uuu,0} = 1 + c_0^3$$

$$d^6_{uuu,uu} = \exp(Kr_{uu}) = \exp(K(2r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))$$

Abbiamo dunque che i costi che lo Stato dovrà sostenere in t_3 sarano:

$$C_{uuu} = d^6_{uuu,uu}u^6 + d^3_{uuu,0}u^3 + d^5_{uuu,u}u^5 =$$

Sostituendo ad u^6 la (3.39) si ha:

$$C_{uuu} = \exp(K(r_u + r_{uu}))u^4 + \exp(r_{uu})(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(Kr_{uu})c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 + \tag{3.40}$$
$$(\exp(Kr_{uu})c_u^5 + 1 + c_u^5)u^5.$$

Sostituiamo ad r_u e r_{uu} l'espressione in (1.20) otteniamo:

$$C_{uuu} = \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 +$$

$$\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))u^4 + (\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_u^5 + 1 + c_u^5)u^5 \tag{3.41}$$

Per il ragionamento fatto anche nel modello a 2 periodi, avremmo $C_{uuu} = C_{uud}$ perchè i tassi di interesse (e dunque anche i costi) in un generico nodo n dipendono dall'evoluzione che vi è stata fino al padre $\alpha(n)$ e dunque saranno gli stessi per tutti i figli $c(\alpha(n))$. Scriveremo nelle prossime pagine solo C_{uuu} sapendo però che $C_{uuu} = C_{uud}$.

Inoltre abbiamo che lo scenario C_{uuu} si verifica con probabilità $q_u q_{uu} q_{uuu}$ invece C_{uud} con probabilità $q_u q_{uu}(1 - q_{uuu})$. Dunque questo costo per lo Stato si verifica con probabilità $q_u q_{uu}$

Scenario relativo ai tassi r_{ud}

Le emissioni supplementari delle obbligazioni nei periodi intermedi rimangono le stesse del caso precedente perchè il tasso di interesse è salito in entrambi gli scenari. Quello che cambia è solo il rendimento dei BOT/BTP tra $[t_2, t_3]$. Ne segue che le uscite al terzo periodo per i titoli in scadenza in t_3 diventano

$$d^3_{udu,0} = 1 + c_0^3$$

$$d^5_{udu,u} = 1 + c_u^5$$

$$d^6_{udu,ud} = \exp(Kr_{ud}) = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))$$

Dunque il costo totale in questo scenario diventa:

$$C_{udu} = C_{udd} = d^6_{udu,ud}u^6 + d^5_{udu,u}u^5 + d^3_{udu,0} + (1 + c_0^3)u^3 =$$

$$\exp(K(r_u+r_{ud}))u^4+\exp(Kr_{ud})(1+c_0^2)u^2+(\exp(Kr_{ud})c_0^3+1+c_0^3)u^3+ \quad (3.42)$$
$$(\exp(Kr_{ud})c_u^5+1+c_u^5)u^5.$$

Sostituendo come nel caso precedente i tassi di interesse, otteniamo:

$$C_{udu} = C_{udd} =$$

$$\exp(Kr_0)(1+c_0^2)u^2+(\exp(Kr_0)c_0^3+1+c_0^3)u^3+\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))u^4+ \quad (3.43)$$
$$(\exp(Kr_0)c_1^5+1+c_u^5)u^5.$$

Scriveremo nelle prossime pagine solo C_{udu} sapendo però che $C_{udu} = C_{udd}$. Con lo stesso ragionamento dello scenario precedente abbiamo che questo costo si verifica con probabilità $q_u(1-q_{uu})$.

Scenario relativo a r_{dd}

In t_1 scade il BOT e bisogna pagare la cedola per i due BTP. Vi saranno dunque delle nuove reimmissioni u^7, BOT a scadenza in t_2 e u^8 BTP a scadenza in t_3. I rendimenti sono gli stessi degli scenari precedenti:

$$u^7 + u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$$

In t_2 scadono il BTP emesso in t_0 e il BOT emesso in t_1.

$$d^2_{dd,0} = 1 + c_0^2$$

$$d^3_{dd,0} = c_0^3$$

$$d^7_{dd,d} = \exp(Kr_d) = \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$
$$d^8_{dd,d} = c_d^8$$
$$u^9 = u^7d^7_{dd,d} + d^2_{dd,0}u^2 + u^3d^3_{dd,0} + u^8d^8_{dd,d} =$$
$$\exp(Kr_d)u^7 + (1+c_0^2)u^2 + c_0^3u^3 + c_d^8u^8 \quad (3.44)$$

In t_3 scadono il BOT emesso in t_2 e i BTP emessi in t_0 e t_1 che comporteranno le seguenti uscite:

$$d^8_{ddu,dd} = 1 + c_d^8$$
$$d^3_{ddu,0} = 1 + c_0^3$$
$$d^9_{ddu,dd} = \exp(Kr_{dd}) = \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))$$

E il costo totale che avrà il Ministero in questo scenario sarà:

$$C_{ddu} = C_{ddd} = d^6_{ddu,dd}u^+d^8_{ddu,d}u^8 + d^3_{ddu,0} + (1+c_0^3)u^3 =$$

$$\exp(K(r_d+r_{dd}))u^7+\exp(Kr_{dd})(1+c_0^2)u^2+(\exp(Kr_{dd})c_0^3+1+c_0^3)u^3+ \quad (3.45)$$
$$(\exp(Kr_{dd})c_d^8+1+c_d^8)u^8$$

Sostituendo i tassi di interesse in (1.20) si ha:

$$C_{ddu} = C_{ddd} =$$
$$\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})))c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 + \tag{3.46}$$
$$\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8.$$

Scriveremo nelle prossime pagine solo C_{ddu} sapendo però che $C_{ddu} = C_{ddd}$. Questo costo, inoltre, si verifica con probabilità $(1 - q_u)q_{du}$.

Scenario relativo a r_{du}

Rispetto al percorso precedente cambiano solo i rendimenti dei BOT/BTP ancora attivi in t_3 :

$$d^8_{duu,du} = 1 + c_d^8$$

$$d^3_{duu,0} = 1 + c_0^3$$
$$d^{10}_{duu,du} = \exp(Kr_{du}) = \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

$$C_{duu} = C_{dud} =$$
$$d^8_{duu,du}u^8 + d^5_{duu,d}u^5 + d^3_{duu,0} + (1 + c_0^3)u^3 =$$
$$\exp(K(r_d + r_{du}))u^7 + \exp(Kr_{du})(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(Kr_{du})c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 + \tag{3.47}$$
$$(\exp(Kr_{du})c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8.$$

Sostituendo i tassi di interesse in (1.20) si ha:

$$C_{duu} = C_{dud} =$$
$$\exp(Kr_0)(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(Kr_0)c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 + \tag{3.48}$$
$$\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})))u^7 + (\exp(Kr_0)c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8.$$

Scriveremo nelle prossime pagine solo C_{duu} sapendo però che $C_{duu} = C_{dud}$. Questo costo si verifica con probabilità $(1 - q_u)(1 - q_{du})$.

La funzione da minimizzare sarà anche in questo caso il valor medio del costo totale :

$$E^P[C] = \frac{C_{uud} + C_{uuu} + C_{dud} + C_{duu} + C_{ddd} + C_{ddu} + C_{dud} + C_{uud}}{8} =$$
$$\frac{C_{uuu} + C_{duu} + C_{ddu} + C_{udu}}{4} \tag{3.49}$$

Aggiungiamo il vincolo del CVaR$_\beta$, così come definito in (2.13) per limitare il rischio di una perdita elevata.

$$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{4(1 - \beta)} < \rho$$

$$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1$$
$$C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2$$
$$C_{ddd} - E[C] - t < \lambda_3$$
$$C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Ecco dunque il problema finale:

$$\min \quad \frac{C_{uuu} + C_{udu} + C_{duu} + C_{ddu}}{4}$$
$$u^1 + u^2 + u^3 = K_0$$
$$u^4 + u^5 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2 u^2 + c_0^3 u^3$$
$$u^7 + u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2 u^2 + c_0^3 u^3$$
$$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{4(1-\beta)} < \rho$$
$$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1$$
$$C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2$$
$$C_{ddd} - E[C] - t < \lambda_3$$
$$C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \tag{3.50}$$

$$C_{uuu} =$$
$$\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 +$$
$$\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))u^4 + (\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_u^5 + 1 + c_u^5)u^5$$

$$C_{udu} =$$
$$\exp(Kr_0)(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(Kr_0)c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 + \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^4 +$$
$$(\exp(Kr_0)c_u^5 + 1 + c_u^5)u^5.$$

$$C_{duu} =$$
$$\exp(Kr_0)(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(Kr_0)c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 +$$
$$\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(Kr_0)c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8.$$

$$C_{ddd} =$$
$$\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + c_0^2)u^2 + (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})))c_0^3 + 1 + c_0^3)u^3 +$$
$$\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8.$$

Cerchiamo una risoluzione a questo problema, partendo prima dal decidere una emissione ottimale al tempo t_1 tra u^4 , u^5 e tra u^7 , u^8 e poi decidere una politica ottimale per l'emissione al tempo t_0. Analizziamo i costi considerando solo il costo finale al variare di u^4 , u^5 e u^7 , u^8 ovvero, rispettivamente, del numero di BOT emessi in t_1 a scadenza in t_2 e del numero di BTP emessi in t_1 e a scadenza in t_3 nel caso i tassi tra $[t_0, t_1]$ siano saliti e nel caso siano scesi. Si ha che, se tra $[t_0, t_1]$ i tassi sono saliti, consideriamo i costi scritti in (3.41), (3.43) e sostituiendo la dinamica dei tassi di interesse, si ottiene:

$$C_{uuu}^{\{u^4,u^5\}} = C_{uud}^{\{u^4,u^5\}} = \exp(K(2r_0+3\sigma\sqrt{K}))u^4+(\exp(K(r_0+2\sigma\sqrt{K}))c_u^5+1+c_u^5)u^5$$

$$C_{udu}^{\{u^4,u^5\}} = C_{udd}^{\{u^4,u^5\}} = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^4 + (\exp(Kr_0)c_u^5 + 1 + c_u^5)u^5$$

Vediamo quando, in questi costi, il coefficiente di u^4 è maggiore del coefficiente di u^5. Se ciò accade in tutti e due i costi, allora in t_1 conviene emettere solo il BTP a scadenza in t_3, perchè comporta un costo minore. In C_{uuu} si ha che il coefficiente di u^4 è maggiore di quello di u^5 se e solo se:

$$\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) > \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_u^5 + 1 + c_u^5 \leftrightarrow$$

$$c_u^5 < \frac{\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))} \tag{3.51}$$

Per quanto riguarda C_{udu}:

$$\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) > \exp(Kr_0)c_u^5 + 1 + c_u^5 \leftrightarrow$$

$$c_u^5 < \frac{\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)} \tag{3.52}$$

Se c_u^5 soddisfa ad entrambe le disuguaglianze, allora in t_1, se i tassi sono saliti tra $[t_0, t_1]$, conviene emettere solo i BTP a scadenza in t_3. Notiamo però che:

$$\frac{\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))} > \frac{\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)}$$

Infatti, facendo un denominatore comune otteniamo che la disuguaglianza sopra è soddisfatta se e solo se:

$$\exp(K(3r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) - \exp(Kr_0) + \exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) - 1 >$$

$$\exp(K(3r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) + \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) - 1$$

e questa è chiaramente soddisfatta perchè dopo aver semplificato i termini uguali, a sinistra della disuguaglianza rimane un termine positivo che è maggiore di quello positivo di destra, e uno negativo è minore del negativo di destra. Dunque, se c_u^5 soddisfa a (3.52) soddisfa anche a (3.51) e quindi conviene emettere solo BTP a scadenza in t_3. Sia, come nel modello a due periodi:

$$h = \frac{\exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))}$$

$$l = \frac{\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)}$$

Sopra abbiamo dimostrato che $h > l$. Scrivendo c_u^5 come (3.36) otteniamo che la disequazione in (3.52) si può scrivere come:

$$\frac{1 - p^u(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + p^u(t_1, t_3)} < l \leftrightarrow$$

$$p^u(t_1, t_2) > \frac{1 - Kl\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 + Kl} \leftrightarrow$$

$$p^u(t_1, t_3) > \frac{(1 - K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})))} \tag{3.53}$$

Abbiamo inoltre che $p^u(t_1, t_3)$ deve soddisfare al teorema (3.2).

Scriviamo il sistema al quale deve soddisfare $p^u(t_1, t_3)$ affinchè convenga emettere, al tempo t_1, solo i BTP a scadenza in t_3.

$$\begin{cases} p^u(t_1, t_2) > \frac{1 - Kl\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + Kl} \\ \exp(K(-2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) \end{cases} \tag{3.54}$$

Vediamo ora, supponendo sempre che tra $[t_0, t_1]$ i tassi siano saliti, quando conviene emettere solo BOT a scadenza in t_2. Conviene farlo se e solo se il coefficiente di u^4 è sempre minore del coefficiente di u^5, ovvero se vale che $c_u^5 > h$. Infatti, poichè $h > l$ si ha che $c_u^5 > h \to c_u^5 > l$, vuol dire che vale il segno opposto nelle disuguaglianze (3.51), (3.52). Abbiamo che:

$$c_u^5 > h \leftrightarrow$$

$$\frac{1 - p^u(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + p^u(t_1, t_3)} > h \leftrightarrow$$

$$p^u(t_1, t_3) < \frac{1 - hK\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})}{1 + Kh} \leftrightarrow$$

$$p^u(t_1, t_3) < \frac{(1 - K)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))} \tag{3.55}$$

e dunque in questo caso il sistema al quale deve soddisfare $p^u(t_1, t_3)$ per cui vale che conviene emettere solo BOT al tempo t_1 a scadenza in t_2 è:

$$\begin{cases} p^u(t_1, t_3) < \frac{1 - hK\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})}{1 + Kh} \\ \exp(K(-2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) \end{cases} \tag{3.56}$$

dove la seconda disequazione rappresenta l'insieme dei valori che può prendere il T-bond secondo il teorema (3.2) Se questo sistema ha soluzione e $p^u(t_1, t_3)$ è scambiato sul mercato reale ad un prezzo che appartiene a questa soluzione, allora lo Stato per minimizzare il costo deve emettere in t_1 solo BOT a scadenza in t_2.

In tutti i casi in cui non vi è una dinamica certa di emissioni, ovvero nei casi in cui emettere BOT può far minimizzare la spesa dello Stato rispetto ai BTP se i tassi scendono, ma può farla aumentare se i tassi salgono, bisogna ricorrere al vincolo del CVaR che ci dirà, dopo aver quantificato quanto siamo disposti a rischiare, l'emissione ottimale tra i BOT e i BTP. Riassumiamo quanto ottenuto con un teorema:

Teorema 3.3 (Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_u$). *Per il non arbitraggio, se i prezzi tra $[t_0, t_1]$ sono saliti, allora $p^u(t_1, t_3)$ che è il prezzo (conosciuto al tempo t_0) di un contratto in t_1 che ci garantisce un'unità monetaria in t_3 soddisferà ai seguenti vincoli:*

$$\exp(K(-2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

Possono inoltre succedere i seguenti scenari:

$$1)se \quad p^u(t_1, t_3) > \frac{(1-K)(\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})))} \tag{3.57}$$

allora l'emissione ottimale è data da: $u^4 = 0$, $u^5 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$ per ogni u^1, u^2, u^3 con $u^1 + u^2 + u^3 = K_0$ emesso al tempo t_0.

$$2)se \quad p^u(t_1, t_3) < \frac{(1-K)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))} \tag{3.58}$$

allora l'emissione ottimale è data da: $u^4 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$, $u^5 = 0$ per ogni u^1, u^2, u^3 tale che $u^1 + u^2 + u^3 = K_0$ emesso al tempo t_0.

3) Se $p^u(t_1, t_3)$ non soddisfa ad 1) e 2) allora non vi è una decisione ottimale free-risk, ma viene decisa dal rischio che decidiamo di correre, ovvero dal vincolo sul CVaR,

Vediamo adesso, con conti analoghi a quelli precedenti, cosa succede alle emissioni in t_1 se i tassi di interesse tra $[t_0, t_1]$ sono scesi. I costi che dobbiamo analizzare sono:

$$C_{dud}^{\{u^7,u^8\}} = C_{duu}^{\{u^7,u^8\}} = \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(Kr_0)c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8$$

$$C_{ddu}^{\{u^7,u^8\}} = C_{ddd}^{\{u^7,u^8\}} = \exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))c_d^8 + 1 + c_d^8)u^8$$

In C_{dud} il coefficiente di u^7 è maggiore di quello di u^8 se e solo se

$$\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) > \exp(Kr_0)c_d^8 + 1 + c_d^8 \leftrightarrow$$

$$c_d^8 < \frac{\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)} \tag{3.59}$$

E in C_{ddu}

$$\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) > (\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))c_d^8 + 1 + c_d^8) \leftrightarrow$$

$$c_d^8 < \frac{\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))} \tag{3.60}$$

Come nel caso precedente, poniamo:

$$m = \frac{\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)}$$

$$n = \frac{\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))}$$

Cerchiamo di capire quale è maggiore:

$$m > n \leftrightarrow \frac{\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(Kr_0)} > \frac{\exp(K(2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - 1}{1 + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))}$$

$$\leftrightarrow \exp(K(3r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K})) - 1 >$$
$$\exp(K(3r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - \exp(Kr_0) + \exp(K(3r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) - 1 \qquad (3.61)$$

e questa è soddisfatta perchè dopo aver semplificato i termini uguali rimangono due termini a sinistra e quello positivo è maggiore di quello positivo a destra e quello negativo è minore di quello negativo a destra. Quindi $c_d^8 < n \to c_d^8 < m$ e dunque se siamo in questa situazione conviene emettere BTP a scadenza in t_3.

Se invece $c_d^8 > m \to c_d^8 > n$ e in questa situazione conviene emettere BOT a scadenza in t_2 e poi in t_2 ulteriori BOT a scadenza in t_3 perchè la cedola è troppo alta e anche se i tassi di interesse salgono tra $[t_1, t_3]$ il rimborso da pagare per un BOT sarà sempre minore del rimborso per un BTP. Scriviamo meglio le due disequazioni precedenti, usando (3.37) ed esplicitanto $p^d(t_1, t_3)$.

$$c_d^8 < n \leftrightarrow$$

$$\frac{1 - p^d(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + p^d(t_1, t_3))} < n \leftrightarrow$$

$$p^d(t_1, t_3) > \frac{1 - Kn\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 + Kn} \leftrightarrow$$

$$p^d(t_1, t_3) > \frac{(1 - K)\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})))} \qquad (3.62)$$

Bisogna aggiungere la condizione a cui deve soddisfare $p^d(t_1, t_3)$, ovvero la condizione del teorema (3.2)

Conviene quindi emettere BTP se il prezzo del $p^d(t_1, t_3)$ scambiato sul mercato reale appartiene alle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} p^d(t_1, t_3) > \frac{1 - Kn\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 + Kn} \\ \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1, t_3) < \exp(K(-2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})) \end{cases} \qquad (3.63)$$

Questo sistema può avere soluzione oppure no in base alla scelta dei parametri. Analogamente, vediamo quando conviene emettere in t_1 solo BOT a scadenza in t_2. Questo, come detto sopra, avviene quando $c_d^8 > m$.

$$c_d^8 > m \leftrightarrow$$

$$\frac{1-p^d(t_1,t_3)}{K(\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))+p^d(t_0,t_3))} > m \leftrightarrow$$

$$p^d(t_1,t_3) < \frac{1-K\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))m}{1+mK} \leftrightarrow$$

$$p^d(t_1,t_3) < \frac{(1-K)\exp(Kr_0)+1+K\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))}{1-K+\exp(Kr_0)(1+K\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))} \tag{3.64}$$

Conviene emettere solo BOT in t_1 se $p^d(t_1,t_3)$ scambiato sul mercato appartiene alle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} p^d(t_1,t_3) < \frac{1-K\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))m}{1+mK} \\ \exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1,t_3) < \exp(K(-2r_0+3\sigma\sqrt{K})) \end{cases} \tag{3.65}$$

Anche le soluzioni di questo sistema dipendono dai parametri.

Per tutti i valori di $p^d(t_1,t_3)$ che non appartengono alle soluzioni dei due sistemi precedenti, non vi è una dinamica di portafoglio costituita totalmente da un tipo di bond che permetta di minimizzare con certezza il costo finale. Ovvero dipende dall'andamento dei tassi di interesse e dunque la dinamica viene decisa dal vincolo sul CVaR, cioè sul rischio che siamo disposti a correre.

Riassumiamo come nel caso precedente i risultati ottenuti con un teorema.

Teorema 3.4 (Emissioni in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_d$)**.** *Per il non arbitraggio, se i prezzi tra* $[t_0,t_1]$ *sono scesi, allora* $p^d(t_1,t_3)$ *soddisferà ai seguenti vincoli:*

$$\exp(K(-2r_0+\sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1,t_3) < \exp(K(-2r_0+3\sigma\sqrt{K}))$$

Possono inoltre succedere i seguenti scenari:

$$1)se \quad p^d(t_1,t_3) > \frac{(1-K)\exp(K(r_0-2\sigma\sqrt{K}))+1+K\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))}{1-K+\exp(K(r_0-2\sigma\sqrt{K}))(1+K\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K})))} \tag{3.66}$$

allora l'emissione ottimale è data da: $u^7 = 0$, $u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$ *per ogni* u^1,u^2,u^3 *tale che* $u^1+u^2+u^3 = K_0$ *emesso al tempo* t_0.

$$2)se \quad p^d(t_1,t_3) < \frac{(1-K)\exp(Kr_0)+1+K\exp(-K(r_0-\sigma\sqrt{K}))}{1-K+\exp(Kr_0)(1+K\exp(K(r_0-\sigma\sqrt{K}))} \tag{3.67}$$

allora l'emissione ottimale è data da: $u^7 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$, $u^8 = 0$ *per ogni* u^1,u^2,u^3 *tale che* $u^1+u^2+u^3 = K_0$ *emesso al tempo* t_0..

3) Se $p^d(t_1,t_3)$ *non soddisfa ad* 1) *e* 2) *allora non vi è una decisione ottimale free-risk, ma viene decisa dal rischio che decidiamo di correre, ovvero dal vincolo sul* CVaR.

Se in entrambi i teoremi (3.3) e (3.4) sono soddisfatti o il punto i) o il punto ii) allora si sostituisce rispettivamente ad u^4,u^5 e u^7,u^8 il valore ottimale nei 4 possibili costi $(C_{uuu},C_{udu},C_{duu},C_{ddu})$ e si avranno dunque dei costi che dipendono solo dalle emissioni iniziali. In quel caso si proverà a fare un analisi similare confrontando in ogni costo possibile i coefficienti di u^1, u^2, u^3 per capire se vi sono, per esempio, delle condizioni per cui un coefficiente è sempre minore di tutti gli altri e dunque conviene emettere solo il titolo che moltiplica quel coefficiente. Nel caso non vi sia una dinamica certa, allora si usa il vincolo sul CVaR e l'emissione è determinata in base a quanto siamo disposti a rischiare. Nel primo esempio numerico che seguirà vi è una risoluzione di questo tipo di problema.

Se invece almeno uno tra il punto *iii*) del teorema (3.3) e il punto *iii*) del teorema (3.4) è soddisfatto, allora bisogna ricorrere al CVaR già in t_1 per decidere l'emissione ottimale. Abbiamo però che il CVaR dipende anche dalle emissioni al tempo t_0 perchè rappresenta l'indice di rischio dell'intero investimento e non dell'investimento nei singoli periodi. In questi casi dunque, risolveremo direttamente il problema al tempo t_0 lasciando u^4, u^5, u^7, u^8 come variabili aleatorie che verranno determinate, insieme all'emissioni al tempo t_0, in base al rischio che ci assumiamo. Il secondo esempio numerico è una risoluzione di questo tipo di problema.

Vediamo questi due esempi numerici.

Esempi numerici

Supponiamo che i tassi abbiano la seguente dinamica:

$$r_0 = 0.05;\ \sigma = 0.01;\ K = 0.5;$$

Vuol dire che al tempo t_0 i tassi di interesse che lo Stato deve offire per vendere i suoi titoli sono del 5% e variano ogni sei mesi di $100\sigma\sqrt{K}\% = 0.7\%$.

Sostituendo i valori numerici alle probabilità q_{uu} e q_{du} e imponendo (1.10) troviamo μ:

$$\mu = \frac{0.755311 - 1.58808p(0,t_2) + 1.07788p(0,t_3)}{0.533243p(0,t_3) - 0.28029p(0,t_2)p(0,t_3)}$$

Abbiamo che, affinchè q_u sia una probabilità, $p(0,t_2)$ dovrà soddisfare alla seguente condizione (abbiamo sostituito i dati numerici alla (1.14)):

$$0.947872 < p(0,t_2) < 0.954598$$

Sostituendo i dati numerici in (3.32) e (3.34) otteniamo:

$$p^u(t_1,t_3) = \frac{0.572659 - 0.604152p(t_0,t_2) + 0.274337p(t_0,t_3)}{0.533243 - 0.28029p(t_0,t_2)} \tag{3.68}$$

$$p^d(t_1,t_3) = \frac{0.576723 - 0.604152p(0,t_2) + 0.272404p(0,t_3)}{0.533243 - 0.28029p(0,t_2)} \tag{3.69}$$

Che come già detto nella parte teorica, dipendono sia da $p(0,t_2)$ che da $p(0,t_3)$. Vediamo se sono soddisfatti 1) o 2) del teorema (3.3). Per il non arbitraggio si ha che:

$$\exp(K(-2r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1,t_3) < \exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

diventa, sostituendo i dati numerici ed esplicitando in $p(0,t_3)$:

$$-0.257985 + 1.24061p(0,t_2) < p(0,t_3) < -0.245003 + 1.23379p(0,t_2) \quad (3.70)$$

Per avere un emissione totale di BTP al tempo t_1 deve accadere che

$$p(0,t_3) > -0.19502 + 1.20751p(0,t_2)$$

Vediamo dunque se ci sono valori che soddisfano ad entrambe le disuguaglianze:

$$-0.19502 + 1.20751p(0,t_2) < -0.245003 + 1.23379p(0,t_2) \leftrightarrow$$

$$p(0,t_2) > 1.90024$$

che dunque non ha soluzioni accettabili. Quindi non vi sono valori accettabili di $p(0,t_2)$ e $p(0,t_3)$ tale per cui se i tassi tra $[t_0,t_1]$ salgono convenga emettere in t_1 un portafoglio di soli BTP. Vediamo se conviene emettere un portafoglio di soli BOT. Bisogna avere che, esplicitando $p(0,t_3)$ rispetto a $p(0,t_2)$:

$$p(0,t_3) < -0.201697 + 1.21102p(0,t_2)$$

e in questo caso abbiamo intersezione tra questa disequazione e quella di non arbitraggio se e solo se:

$$p(0,t_2) < 1.90247$$

che in questo caso ha soluzione. Riassumendo: se i tassi di interesse tra $[t_0,t_1]$ sono saliti, per ogni valore accettabile di $p(0,t_2)$ e $p(0,t_3)$ allora conviene emettere in t_1 solo BOT a scadenza in t_2. Vediamo cosa succede se i tassi di interesse tra $[t_0,t_1]$ sono scesi. Per un portafoglio di soli BOT bisogna avere:

$$p^d(t_1,t_3) < 0.977036$$

Che esplicitando $p(0,t_3)$ si ha che:

$$p(0,t_3) < -0.20457 + 1.21253p(0,t_2)$$

Vediamo se abbiamo soluzioni che soddisfano al non arbitraggio.

$$-0.20457 + 1.21253p(0,t_2) > -0.257985 + 1.24061p(0,t_2)$$

da soluzioni con $p(0,t_2) < 1.90$ e dunque anche in questo caso vi sono valori accettabili. Riassumendo, in t_1 indipendentemente dal fatto che tra $[t_0,t_1]$ i tassi siano saliti o scesi, conviene emettere un portafoglio solo di BOT. Possiamo quindi sostituire in C_{uuu} e C_{udu} $u^4 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$ e $u^5 = 0$, e in C_{duu} e C_{ddu} $u^7 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0^2u^2 + c_0^3u^3$ e $u^8 = 0$ riportandoci così a dei costi che dipendono solo dalle emissioni in t_0. Sostituendo i valori appena detti e raccogliendo i termini comuni, ritroviamo i seguenti costi:

$$C_{uuu} = \exp(K(3r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))u^1$$

$$+ \left(\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))(c_0^2 + 1) + \exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))c_0^2\right) u^2$$

$$+ \left((\exp(K(r0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + \exp(K(2r_0 + 3\sigma\sqrt{K})))c_0^3 + 1\right) u^3;$$

$$C_{duu} = \exp(K(3r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 +$$

$$\left(\exp(Kr_0)(c_0^2+1) + \exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K}))c_0^2\right)u^2$$

$$+\left((\exp(Kr_0)+1+\exp(K(2r_0+\sigma\sqrt{K})))c_0^3+1\right)u^3;$$

$$C_{udu} = \exp(K(3r_0)\sigma\sqrt{K}))u^1 +$$

$$\left(\exp(Kr_0)(c_0^2+1) + \exp(K(2r_0-\sigma\sqrt{K}))c_0^2\right)u^2$$

$$+\left((\exp(Kr_0)+1+\exp(K(2r_0-\sigma\sqrt{K})))c_0^3+1\right)u^3;$$

$$C_{ddu} = \exp(K(3r_0 - 3\sigma\sqrt{K}))u^1 +$$

$$\left(\exp(K(r_0-2\sigma\sqrt{K}))(c_0^2+1) + \exp(K(2r_0-3\sigma\sqrt{K}))c_0^2\right)u^2$$

$$+\left((\exp(K(r0-2\sigma\sqrt{K}))+1+\exp(K(2r_0-3\sigma\sqrt{K})))c_0^3+1\right)u^3;$$

Facciamo un grafico in $3D$, facendo variare $p(0,t_2)$ e $p(0,t_3)$ tra i valori possibili che possono prendere e confrontiamo i coefficienti di u^1, u^2, u^3. Nelle prossime Figure, la funzione rossa rappresenta il coefficiente di u^1, la funzione blu rappresenta il coefficiente di u^2 e la funzione gialla rappresenta il coefficiente di u^3. Rappresentiamo solo due grafici, quello relativo a C_{uuu} e quello relativo a C_{ddu}. Notiamo che indipendentemente dal nodo finale in cui mi trovo e indipendentemente dai valori dei T-bond, emettere il BOT comporta sempre un costo minore di emettere i BTP. L'interpretazione di questa soluzione potrebbe essere la seguente: la variazione dei tassi avviene molto lentamente ($K\sigma\sqrt{K} \approx 0.007$) e dunque conviene emettere i BOT perchè anche se i tassi salgono, la variazione è molto lenta da comportare sempre un costo minore rispetto al pagamento di cedole semestrali e al rimborso del valore nominale del BTP in t_2 e t_3.

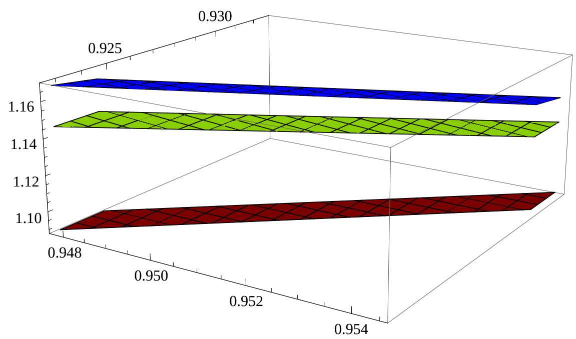

Figura 3.13: Confronto tra i coefficienti dei bonds emessi in t_0 nel caso C_{uuu}. Notiamo che anche se i tassi di interesse salgono, il costo viene minimizzato emettendo in BOT a scadenza in t_1 (funzione rossa) che ha un coefficiente minore dei BTP.

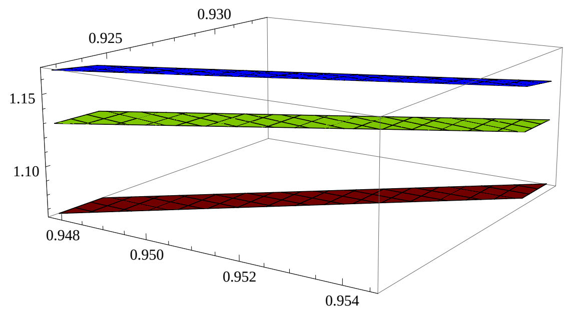

Figura 3.14: Confronto tra i coefficienti dei bonds emessi nel caso C_{ddu}.

Secondo esempio numerico

Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$r_0 = 0.05; \sigma = 0.02; K = 1;$$

dunque un tasso d'interesse iniziale del cinque per cento che può variare ogni anno di due punti percentuali. Con questi valori numerici abbiamo che $q_u \in (0,1)$ se e solo se $0.88692 < p(0,t_2) < 0.923116$. Supponiamo inoltre che sul mercato in t_0 il prezzo di $p(0,t_2)$ sia:

$$p(0,t_2) = 0.9078$$

Conoscendo questo prezzo, conosciamo anche il prezzo dei T-bond in t_1 in funzione di $p(0,t_3)$. Sostituendo i valori numerici in (3.32), (3.34) si ha:

$$p^u(t_1,t_3) = -0.0490405 + 1.0756p(0,t_3) \quad p^d(t_1,t_3) = 0.035974 + 1.03342p(0,t_3)$$

Abbiamo inoltre che $p^u(t_1,t_3)$ deve soddisfare al teorema (3.2). Esplicitando l'espressione in $p(0,t_3)$ otteniamo:

$$0.837844 < p(0,t_3) < 0.870176$$

Facendo una cosa analoga con $p^d(t_1,t_3)$ si ha che:

$$0.858449 < p(0,t_3) < 0.894904$$

Poichè devono essere entrambe soddisfatte, otteniamo che il prezzo di un contratto in t_0 che ci garantisce un'unità monetaria in t_3 dovrà soddisfare alla seguente condizione:

$$0.858449 < p(0,t_3) < 0.870176 \tag{3.71}$$

Vediamo quale punto del teorema (3.3) è soddisfatto. L' 1) del teorema, esplicitandola in $p(0,t_3)$, è equivalente a:

$$p(0,t_3) > 0.870176$$

La 2) del teorema è equivalente a:

$$p(0,t_3) < 0.837844$$

Notiamo che nessuna delle due disequazioni scritte sopra può verificarsi. Dunque, se i tassi tra $[t_0, t_1]$ salgono, allora non vi è un emissione *free-risk* di soli BOT o BTP che permetta di minimizzare il costo indipendentemente dall'andamento dei tassi di interesse. Vediamo ora quale punto del teorema (3.3) è soddisfatto. L' 1) e la 2) del teorema, esplicitandoli in $p(0, t_3)$, danno rispettivamente:

$$p(0, t_3) > 0.894904$$

$$p(0, t_3) < 0.858449$$

Anche in questo caso, nessuna delle due è soddisfatta, e quindi varrà la 3) del teorema. Vuol dire che per nessun valore di $p(0, t_3)$ accettabile, esiste una politica di emissione che permetta di minimizzare i costi sia se i tassi salgono, sia se i tassi scendono. In altre parole, per qualunque valore di $p(0, t_3)$ scambiato sul mercato bisogna ricorrere al vincolo sul CVaR per limitare una perdita elevata, facendo variare l'indice ρ di rischio e vedendo come varia la distribuzione di emissione. Supponiamo dunque che:

$$p(0, t_3) = 0.86$$

Con questi dati abbiamo che la cedola per il bond emesso in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_u$ vale 0.068, mentre la cedola per il bond in t_3 se $r_{t_1} = r_d$ vale 0.0397. Attraverso l'indice di rischio risolveremo il problema generale, ovvero (3.50) e dunque troveremo delle emissioni ottmali in t_0 e in t_1 sia nel caso i tassi tra $[t_0, t_1]$ siano saliti, sia nel caso siano scesi. Mostriamo nelle prossime Figure (3.15), (3.16) e (3.17) i risultati di questo problema, ovvero i grafici rispettivamente dell'emissione dei bond in t_0 e t_1 nel caso i tassi siano saliti nel primo periodo e in t_1 nel caso siano scesi. L'asse x rappresenta ρ che varia da 0.35 (valore minimo per cui abbiamo una soluzione che soddisfa ai vincoli, ovvero non esiste un emissione in cui il rischio ̀quantificato con un valore minore di 0.35) fino a 3.35 a passi di 0.1.

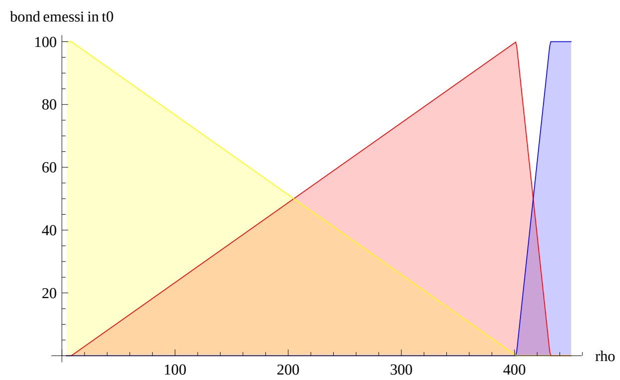

Figura 3.15: La linea rossa rappresenta i BOT, quella blu i BTP a scadenza in t_2 quella gialla i BTP a emissione in t_3. Notiamo che con un indice di rischio basso conviene emettere solo il BTP a scadenza in t_3, aumentando l'indice di rischio si aumenta l'emissione di BOT. Con un livello di rischio molto alto invece, l'emissione ottimale che minimizza il valor medio dei costi si ha con il BTP a scadenza in t_2.

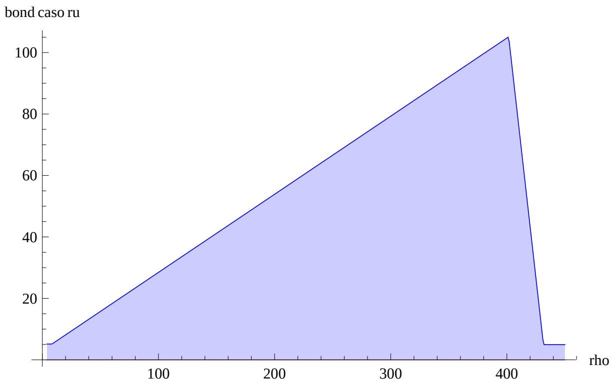

Figura 3.16: Se i tassi tra $[t_0, t_1]$ salgono, allora conviene emettere in t_1 il BTP a scadenza in t_3.

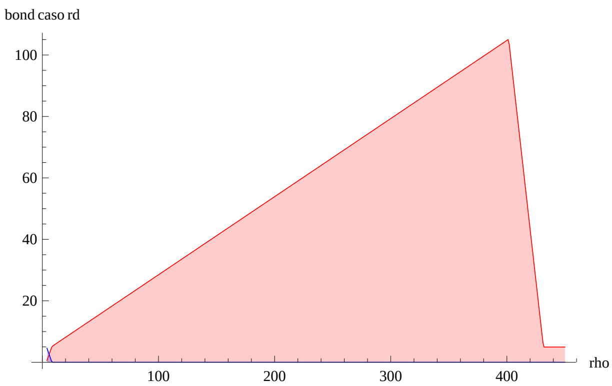

Figura 3.17: Emissioni in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_d$. Con un indice di rischio molto basso conviene emettere solo i BTP ma appena aumentiamo un po' il rischio l'emissione ottimale è data dal BOT a scadenza in t_2

La spiegazione delle emissioni in t_1 è la seguente: Se i tassi sono saliti tra $[t_0, t_1]$ una nuova emissione di BOT fa si che il rendimento di questi ultimi e dunque la spesa che comporta allo Stato, per come è definito il *fattore di capitalizzazione* in (2.1), dipende solo dal tasso di interesse che vi è t_1 e non da cosa succede tra $[t_1, t_2]$. Dunque se $r_{t_1} = r_u$ l'emissione di un BOT in t_1 porterà ad una spesa di $\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))$ in t_2. È per queste ragioni che se i tassi vanno giù e siamo disposto a rischiare un po', allora emettiamo BOT, che porteranno ad una spesa in t_2 di $\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))$. Se i tassi tra $[t_0, t_1]$ vanno su, allora è più conveniente emettere il BTP a scadenza in t_3.

Supponiamo invece che il prezzo del T-bond a scadenza in t_2 sia il seguente:

$$p(0, t_2) = 0.907$$

Con conti esattamente analoghi a quelli precedenti, viene fuori che per nessuno valore di $p(0, t_3)$ accettabile vi è in t_1 un portafoglio che permetta di minimizzare i costi dello Stato indipendentemente dai tassi di interesse (sia se tra $[t_0, t_1]$ sono saliti, sia se sono scesi). Abbiamo che risolvendo il problema (3.50), otteniamo che con una diminuzione (seppur minima) del prezzo del bond abbiamo un aumento (si vede subito che sono inversamente proporzionati) della cedola e questo spiega il motivo delle emissioni in t_0 con i nuovi dati: anche con un indice di rischio elevato, non conviene emettere il BTP a scadenza in t_2 perchè probabilmente questo leggero aumento della cedola (da 0.049 a 0.05) fa si che qualunque scenario di verifichi, emettere BOT minimizza il costo anche accettando un rischio elevato. Mostriamo nella prossima Figura l'emissione al tempo t_0. Le emissioni al tempo t_1 non cambiano nella diversificazione di portafoglio ma cambiano nella quantità: emettendo solo BOT al tempo t_1 abbiamo una spesa più elevata da sostenere e da coprire.

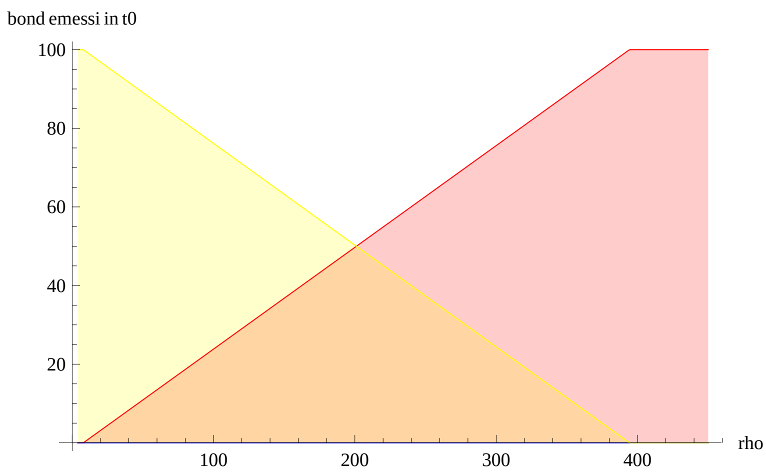

Figura 3.18: Non viene emesso il BTP a scadenza in t_2 a causa dell'aumento seppur minimo della cedola. Con un indice di rischio basso conviene emettere il BTP a scadenza in t_3, aumentando il rischio si ha un emissione di BOT a scadenza in t_1.

Modello a tre periodi diverso

Nel modello a tre periodi precedente abbiamo visto che se almeno uno tra il punto *iii*) del teorema (3.3) o del teorema (3.4) è soddisfatto, allora non vi è una decisione ottimale per le emissioni in t_1 indipendentemente da come emettiamo in t_0 e quindi il problema si risolve usando il CVaR già per le emissioni in t_0. Per come lo abbiamo definito in (2.13) il CVaR pesa ogni nodo finale al tempo t_H in modo uguale e non tiene conto di cosa succede al generico tempo t_i proprio perchè è un vincolo sull'intera evoluzione del portafoglio e non diversifica le emissioni ad ogni singolo periodo. Quello che potrebbe succedere in realtà è che lo Stato possa variare il rischio che è disposto a correre in base a come si sono evuoluti i tassi di interesse in ogni singolo periodo. Infatti, se tra $[t_0, t_1]$ i tassi sono saliti, per come abbiamo trovato i pesi della misura martingala Q la probabilità che i tassi salgano ancora tra $[t_0, t_1]$ diminuisce (essendo $\mu > 0$ la probabilità che i tassi salgano tra $[t_i, t_{i+1}]$ è inversamente proporzionale al livello dei tassi in t_i). Lo Stato dunque potrebbe decidere di rischiare di più con le successive emissioni in t_1 se i tassi tra $[t_0, t_1]$ sono saliti e invece rischiare di meno se sono scesi.

Se i tassi sono saliti, i possibili scenari sono solo due, C_{uuu} e C_{udu}. Abbiamo naturalmente che il primo è maggiore del secondo perchè i costi sono direttamente proporzionali ai tassi. Con gli stessi conti del modello a due periodi, nel caso C_{uu}, C_{dd} e $E[C]$ intendendo con $E[C]$ la media tra i due costi possibili nel caso $r_{t_1} = r_u$ otteniamo che il vincolo sul CVaR in questo caso è:

$$\mathrm{CVaR}^{\mathrm{u}} = \frac{\beta(C_{uuu} - C_{udu})}{2(1-\beta)} < \rho_u \tag{3.72}$$

Se i tassi sono scesi, sempre con gli analoghi conti del modello a due periodi considerando i costi C_{duu} e C_{ddu} e $E[C] = \frac{C_{duu}+C_{ddu}}{2}$ abbiamo che il vincolo è:

$$\mathrm{CVaR}^{\mathrm{d}} = \frac{\beta(C_{duu} - C_{ddu})}{2(1-\beta)} < \rho_d \tag{3.73}$$

Proviamo a vedere, con l'esempio numerico precedente ovvero con la stessa dinamica dei tassi di interesse, con $p(0, t_2) = 0.9078$ e $p(0, t_3) = 0.86$, come cambia l'emissione di portafoglio al variare di ρ_u, ρ_d. Se entrambi sono molto alti chiaramente il vincolo è praticamente nullo e dunque le emissioni dovrebbero essere le stesse del caso precedente. Infatti nell'implementazione abbiamo che se $\mathrm{CVaR}^{\mathrm{u}}, \mathrm{CVaR}^{\mathrm{u}} < 100$ le emissioni rimangono le stesse. Se però poniamo $\rho_u = 20$ e $\rho_d = 30$ ovvero accettiamo un rischio maggiore se i tassi tra $[t_0, t_1]$ dovessero scendere, otteniamo le emissioni delle Figure (3.19) (3.20) e (3.21). Le emissioni in t_0 sono coerenti con la misura di rischio che abbiamo utilizzato: la diversificazione di portafoglio porta ad una diminuzione del rischio e dunque vincolando strettamente il rischio ad ogni periodo, abbiamo un vincolo sulle emissioni di tutti i bonds. Le Figure sono sempre ottenute facendo variare ρ e dunque il vincolo sul CVaR nel caso generale tra 0.35 a 5 a passi di 0.1.

Se invece supponiamo di avere la stessa dinamica dei tassi di interesse ma i seguenti prezzi dei T-bond (che sono coerenti con il teorema (3.2)):

$$p(0, t_2) = 0.90; \quad p(0, t_3) = 0.85; \rho_u = 15; \quad \rho_d = 20;$$

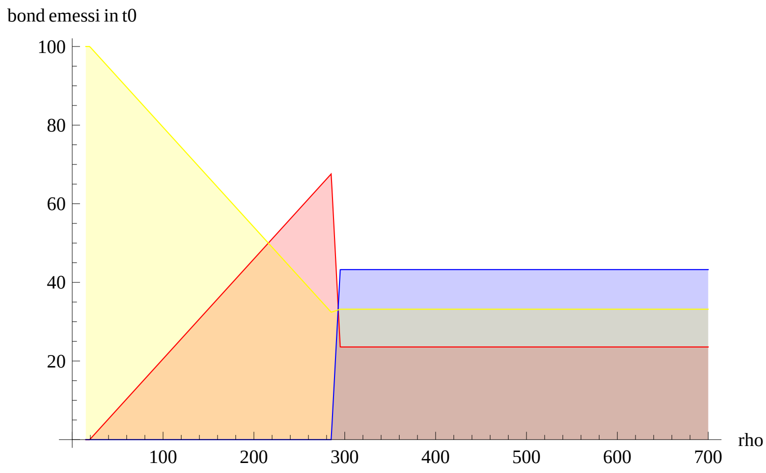

Figura 3.19: Con un vincolo di rischio maggiore nel caso i tassi dovessero salire tra $[t_0, t_1]$ abbiamo che il portafoglio ottimale comporta anche l'emissione del BTP a scadenza in t_2 che nel caso precedente non veniva emesso.

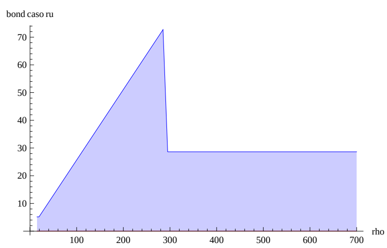

Figura 3.20: Se i tassi dovessero salire, allora il portafoglio ottimale è caratterizzato dall'emissione dei soli BTP.

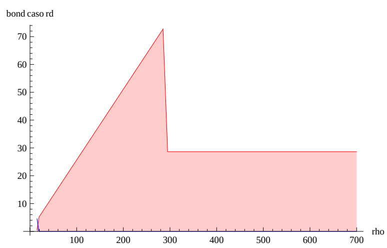

Figura 3.21: Con un indice di rischio ρ molto basso viene emesso il BTP, prendendoci un po' di rischio l'emissione ottimale è data dal BOT.

Abbiamo la dinamica di emissione rappresentata nelle seguenti Figure. Notiamo che questi vincoli fanno emettere anche il BTP in t_1 se $r_{t_1} = r_d$.

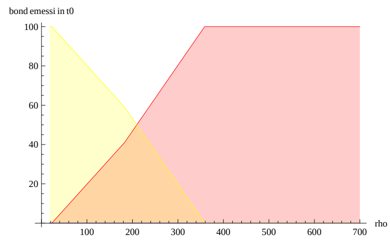

Figura 3.22: Aumentando l'indice di rischio diminuisce l'emissione del BTP a scadenza in t_3 come nei precedenti esempi

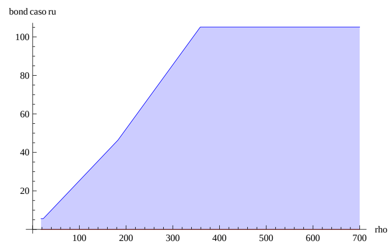

Figura 3.23: Il portafoglio ottimale è caratterizzato dall'emissione dei soli BTP.

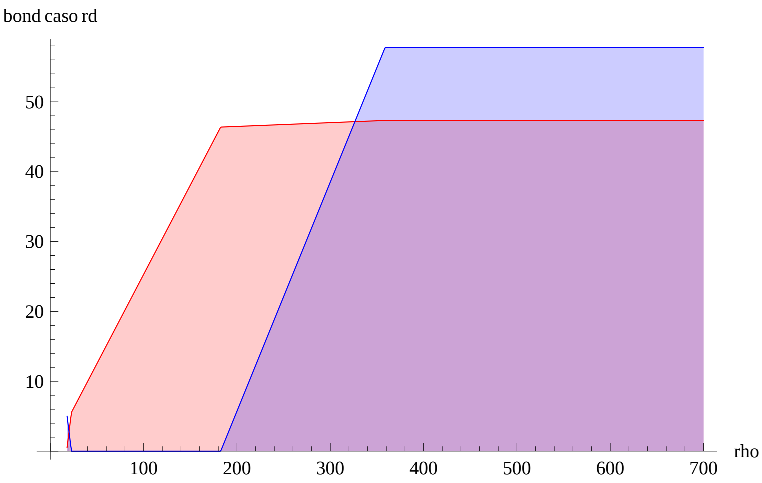

Figura 3.24: Con un indice di rischio ρ molto basso viene emesso il BOT, con un po' di rischio abbiamo una diversificazione di emissione tra il BTP (in quantità maggiore) e il BOT

Capitolo 4

Implementazione

Nella parte implementativa verranno scritti i codici utilizzati per riproporre le Figure presenti in questo testo.

Figura (1.1), generatore di tre andamenti casuali dei tassi di interesse.

$r[0] = 0.1; t[0] = 0.1; s[0] = 0.1;$

$\text{Table}[\text{Module}[\{i\}, i = \text{RandomInteger}[\{1, 100\}]; \text{If}[0 \leq i \leq 100*;$
$N[\frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}-\mu\ p(0,t_i)\exp(K(i+1)(r_{t_i})))}{\exp(\exp(2i^2K\sigma\sqrt{K})-1}],\ ;$

$r[j+1] = r[j] + S\ \text{Sqrt}[K], r[j+1] = r[j] - S\ \text{Sqrt}[K]]], \{j, 0, 10\}];$

$\text{Table}[\text{Module}[\{i\}, i = \text{RandomInteger}[\{1, 100\}];$

$\text{If}[0 \leq i \leq 100 * N[\frac{\exp(K\sigma\sqrt{K});}{}[\exp(K\sigma\sqrt{K} - \mu\ p(0, t_i)\exp(K(i+1)(r_{t_i})))\exp(\exp(2i^2K\sigma\sqrt{K}) - 1,$

$t[j+1] = t[j] + S\text{Sqrt}[K], t[j+1] = t[j] - S\text{Sqrt}[K]]], \{j, 0, 10\}];$

$\text{Table}[\text{Module}[\{i\}, i = \text{RandomInteger}[\{1, 100\}];$

$\text{If}[0 \leq i \leq 100 * N;$
$[\frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})\exp(K\sigma\sqrt{K}-\mu\ p(0,t_i)\exp(K(i+1)(r_{t_i})))}{\exp(\exp(2i^2K\sigma\sqrt{K})-1};$

$s[j+1] = s[j] + S\text{Sqrt}[K], s[j+1] = s[j] - S\ \text{Sqrt}[K]]], \{j, 0, 10\}];$

$\text{Graphics}[\{\text{Blue}, \text{Line}[\text{Table}[\{i, r[i]\}, \{i, 0, 10\}]], \text{Orange}, \text{Line}[\text{Table}[\{i, t[i]\}, \{i, 0, 10\}]], \text{Black},$

$\text{Line}[\text{Table}[\{i, s[i]\}, \{i, 0, 10\}]], \text{Red}, \text{Point}[\text{Table}[\{i, r[i]\}, \{i, 0, 10\}]]\},$

$\text{Axes} \to \text{True}, \text{PlotRange} \to \{\{0, 10\}, \{0, 0.5\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.5]$

Figura(2.1), una classica struttura ad albero non ricombinante. Per rappresentarlo vi è una funzione preimpostata, *TreePlot.*

$t = \text{Flatten}[\text{Table}[\{i \to 2i + j - 1\}, \{j, 2\}, \{i, 63\}]];$

$\text{Table}[\text{TreePlot}[t, p], \{p, \{\text{Left}\}\}]$

Modello a due periodi: assegnamento dei valori ai parametri, funzione dei costi, valor medio e CVaR.

$K = 1;\ \sigma = 0.01; r_0 = 0.03;$

$\beta = 0.95; K_0 = 100;\ ;$

$\text{c2}[p(0, t_2)\_] := \frac{2(1-p(0,t_2))}{\exp[-Kr_0]+p(0,t_2)};$

$\sigma\text{Sqrt}[K];$

$\text{Cuu}[u^1, u^2\_, p(0, t_2)] := \exp[2Kr_0 + \sigma\text{Sqrt}[K])]u^1 + \exp[K(r_0 + \sigma\text{Sqrt}[K])]c2 + 1 + c2u^2;$

$\mathrm{Cdd}[u^1\_, u^2\_, p(0,t_2)\_] := \exp[K(2r_0 - \sigma \mathrm{Sqrt}[K])]u^1 + (\exp[K(r_0 - \sigma;$

$\mathrm{Sqrt}[K])]c2 + 1 + c2)u^2;$

$A[C] = \frac{C_{uu}\ [u^1,u^2,p(0,t_2)]+C_{dd}[u^1,u^2,p(0,t_2)]}{2};$

$\mathrm{CVaR}[C] = \frac{a(C_{uu}[u^1,u^2,p(0,t_2)]-C_{dd}[u^1,u^2,p(0,t_2)])}{2(1-\beta)};$

Codici per le funzioni dei costi (ne mostriamo uno, per le altre basta cambiare i parametri).

$d = \frac{2(1-\beta)\rho}{\beta};$

$f[p(0,t_2)] := \exp[K(2r_0 + \sigma \mathrm{Sqrt}[K])];$

$g[p(0,t_2)] := \exp[K(2r_0 - \sigma \mathrm{Sqrt}[K])];$

$m[p(0,t_2)] := \exp[K(r_0 + \sigma \mathrm{Sqrt}[K])]c2 + 1 + c2;$

$p[p(0,t_2)] := \exp[K(r_0 - \sigma \mathrm{Sqrt}[K])]c2 + 1 + c2;$

$\mathrm{Plot}[\{f[p(0,t_2)], m[p(0,t_2)]\}, \{p(0,t_2), 0.932390, 0.951229\}, \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Red}, \mathrm{Blue}\};$

$, \mathrm{PlotRange} \to \{\{0.9300, 0.951229\}, \{1, 1.2\}\}, \mathrm{AxesOrigin} \to \mathrm{Automatic}];$

Implementazione che calcola il minimo della funzione valor medio, sotto i vincoli del problema a due periodi.

$w = \mathrm{Table}[\mathrm{NMinimize}[\{A[C],\ u^1 + u^2\ == 100\&\&u^1 \geq 0\&\&u^2 \geq 0\&\&\mathrm{CVaR}[C] <\ \rho\}, \{u^1, u^2\}], \{\rho, 1, 15, 0.1\}];$

$p[\mathrm{g}\_] := u^1/.w[[g]][[2]][[1]];$

$v[\mathrm{g}\_] := u^2/.w[[g]][[2]][[2]];$

$\mathrm{DiscretePlot}[\{p[g], v[g]\}, \{g, 1, 138\}, \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Red}, \mathrm{Blue}\ ;$

$, \mathrm{AxesLabel} \to \{\mathrm{rho}, \mathrm{bondemessi}\}, \mathrm{AxesOrigin} \to \{0,0\}]$

Codice per rappresentare le figure (3.1) e seguenti:

$\mathrm{Show}[\mathrm{Graphics}[\{\mathrm{Line}[\{\{0,1\}, \{0,0\}, \{3,0\}, \{3,1\}\}], \mathrm{Text};$

$[\mathrm{Style}[\exp[K(-2r_0 - \sigma;$

$\mathrm{Sqrt}[K])], \mathrm{Medium}], \{0, 1.2\}], \mathrm{Text}[\mathrm{Style};$

$[\exp[K(-2r_0 + \sigma \mathrm{Sqrt}[K])], \mathrm{Medium}], \{3, 1.2\}]\}],$

$\mathrm{Graphics}[\{\mathrm{Line}[\{\{4, 1.5\}, \{4, -0.5\}, \{-1, -0.5\}\}]\}, ;\mathrm{Text}\left[\mathrm{Style}\left[\frac{1-Kh\mathrm{Exp}[-K\mathrm{r}0]}{1+Kh}, \mathrm{Medium}\right], \{4,2\}\right];$

$\mathrm{Show}[\mathrm{Graphics}[\{\mathrm{Line}[\{\{0,1\}, \{0,0\}, \{3,0\}, \{3,1\}\}];$

$\mathrm{Text}[\mathrm{Style}[\exp[K(-2r_0 - \sigma \mathrm{Sqrt}[K])], \mathrm{Medium}];\{0, 1.2\}], \mathrm{Text}[\mathrm{Style};$

$[\mathrm{Exp}[K(-2r_0 + \sigma \mathrm{Sqrt}[K])], \mathrm{Medium}], \{3, 1.2\}]\}],$

$\mathrm{Graphics}[\mathrm{Line}[\{\{2, 1.3\}, \{2, -.25\}, \{4, -.25\}\}]];$

$\mathrm{Text}[\mathrm{Style}[\frac{1-Kl\exp[-Kr0]}{1+Kl}, \mathrm{Medium}], \{2, 1.8\}];$

Appendice A

Analisi dei parametri per la misura martingala

Supponiamo:

$$q_{uu} = A_3 - \mu_3 p(0,t_3) exp(B_3(r_0 + \sigma\sqrt{K}))$$
$$q_{du} = A_3 - \mu_3 p(0,t_3) exp(B_3(r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$

Si ha che:

$$q_{uu} > 0 \leftrightarrow A_3 - \mu_3 p(0,t_3) exp(B_3(r_0 + \sigma\sqrt{K})) > 0 \leftrightarrow$$
$$p(0,t_3) < \frac{A_2 \exp(-B_3 r_0)\exp(-B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu_3}$$

$$q_{du} > 0 \leftrightarrow A_3 - \mu_3 p(0,t_3) exp(B_3(r_0 - \sigma\sqrt{K})) > 0 \leftrightarrow$$
$$p(0,t_3) < \frac{A_3 \exp(-B_3 r_0)\exp(+B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu_3}$$

Poichè devono essere verificate entrambe, supponendo $\mu_3 > 0$ come è logico attendersi bisogna che:

$$p(0,t_3) < \frac{A_3 \exp(-B_3 r_0)\exp(-B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu_3}$$

$$q_{uu} < 1 \leftrightarrow A_3 - 1 < \mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3(r_0 + \sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$
$$p(0,t_3) > \frac{(A_3 - 1)\exp(-B_3 r_0)\exp(-B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu}$$

$$q_{du} < 1 \leftrightarrow A_3 - 1 < \mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3(r_0 - \sigma\sqrt{K})) \leftrightarrow$$
$$p(0,t_3) > \frac{(A_3 - 1)\exp(-B_3 r_0)\exp(B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu}$$

Poichè devono essere verificate entrambe si ha che, supponendo $A_3 > 1$ (altrimenti sono sempre verificate, considerando $\mu > 0$).

$$p(0,t_3) > \frac{(A_3 - 1)\exp(-B_3 r_0)\exp(B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu}$$

In definitiva:

$$\frac{(A_3-1)\exp(-B_3r_0)\exp(B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu} < p(0,t_3) < \frac{A_2\exp(-B_3r_0)\exp(-B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu_3}$$

Abbiamo valori di $p(0,t_3)$ accettabili se e solo se:

$$\frac{(A_3-1)\exp(-B_3r_0)\exp(B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu} < \frac{A_3\exp(-B_3r_0)\exp(-B_3\sigma\sqrt{K})}{\mu_3}$$

Otteniamo,semplificando i termini simili:

$$A_3\exp(B_3\sigma\sqrt{K}) - A_3\exp(-B_3\sigma\sqrt{K}) < \exp(B_3\sigma\sqrt{K}) \leftrightarrow$$

$$A_3(\frac{\exp(2B_3\sigma\sqrt{K})-1}{\exp(B_3\sigma\sqrt{K})}) < \exp(B_3\sigma\sqrt{K})$$

Dunque si ha:

$$A_3 < \frac{\exp(2B_3\sigma\sqrt{K})}{\exp(2B_3\sigma\sqrt{K})-1}$$

Scegliendo in maniera arbitraria B_3 e scegliendo $A_3 > 1$ che soddisfi a questa disuguaglianza, poi possiamo trovare μ imponendo che:

$$p(0,t_3) = E^Q[\exp(-K(r_0+r_1+r_2))]$$

Posto $K\sigma\sqrt{K} = T$

$$p(0,t_3)\exp(3Kr_0) = \exp(-3T)q_uq_{uu} + \exp(-T)q_u(1-q_{uu}) +$$

$$\exp(T)(1-q_u)q_{du} + \exp(3T)(1-q_u)(1-q_{du}) \leftrightarrow$$

$$p(0,t_3)\exp(3Kr_0) = q_u(\exp(-T) + q_{uu}(\exp(-3T)-\exp(-T))) +$$

$$(1-q_u)(\exp(3T) + q_{du}(\exp(T)-\exp(3T))) \leftrightarrow$$

$$p(0,t_3)\exp(3Kr_0) = q_u(\exp(-T) - q_{uu}(\frac{\exp(2T)-1}{\exp(3T)})) +$$

$$(1-q_u)(\exp(3T) - q_{du}(\exp(T)(\exp(2T)-1)) = \exp(3T) + q_u(\exp(-T)-\exp(3T))$$

$$-q_uq_{uu}\frac{\exp(2T)-1}{\exp(3T)} - (1-q_u)q_{du}(\exp(T)(\exp(2T)-1))$$

Sostituendo q_u otteniamo la seguente uguaglianza:

$$p(0,t_3)\exp(3Kr_0) = -\exp(T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0+2T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0) -$$

$$q_{uu}\frac{\exp(T)-p(0,t_2)\exp(2Kr_0)}{\exp(2T)}$$

$$-q_{du}(p(0,t_2)\exp(2Kr_0+2T) - \exp(T))$$

Portando al primo membro i termini che non dipendono dalle probabilità si ha:

$$-p(0,t_3)\exp(3Kr_0) - \exp(T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)(\exp(2T)+1) =$$

$$(A_3 - \mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3(r_0+T)))\,(\exp(-T) - p(0,t_2)\exp(2Kr_0-2T)) +$$

$$(A_3 - \mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3(r_0-T)))\,(p(0,t_2)\exp(2Kr_0+2T) - \exp(T))$$

Svolgiamo i prodotti e raccogliamo i termini comuni:

$$-p(0,t_3)\exp(3Kr_0) - \exp(T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)(\exp(2T)+1) =$$

$$-A_3(\exp(T) - \exp(-T)) + A_3 p(0,t_2)\exp(2Kr_0)(\exp(2T) - \exp(-2T)) +$$

$$-\mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3 r_0)\,(\exp(T(B_3-1)) - \exp(-T(B_3-1)))$$

$$+\mu_3 p(0,t_2)p(0,t_3)\exp(r_0(B_3+2K))\,(\exp(T(B_3-2)) - \exp(-T(B_3-2))) \leftrightarrow$$

Portiamo il termine che non dipende da μ_3 a sinistra:

$$-p(0,t_3)\exp(3Kr_0) - \exp(T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)(\exp(2T)+1) +$$

$$A_3\left(\frac{\exp(2T)-1}{\exp(T)}\right) - A_3 p(0,t_2)\exp(2Kr_0-2T)(\exp(2T)+1)) =$$

$$-\mu_3 p(0,t_3)\exp(B_3 r_0)\left((\exp(T))^{B_3-1} - (\exp(-T))^{B_3-1}\right) +$$

$$+\mu p(0,t_2)p(0,t_3)\exp(r_0(B_3+2K))\left((\exp(T))^{B_3-2} - (\exp(-T))^{B_3-2}\right)$$

Raccoglinedo i termini comuni otteniamo a destra:

$$\mu p(0,t_3)\exp(B_3 r_0)(((-\exp(T))^{B_3-1} + (\exp(-T))^{B_3-1}) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)((\exp(T))^{B_3-2} - (\exp(-T))^{B_3-2}))$$

Infine, esplicitando μ otteniamo:

$$\mu p(0,t_3) =$$

$$\frac{-p(0,t_3)\exp(3Kr_0) - \exp(T) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)(\exp(2T)+1)}{\exp(B_3 r_0)(((-\exp(T))^{B_3-1} + (\exp(-T))^{B_3-1}) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)((\exp(T))^{B_3-2} - (\exp(-T))^{B_3-2}))} +$$

$$\frac{A_3(\exp(T) - \exp(T)) - A_3 p(0,t_2)\exp(2Kr_0-2T)(\exp(2T)+1))}{\exp(B_3 r_0)(((-\exp(T))^{B_3-1} + (\exp(-T))^{B_3-1}) + p(0,t_2)\exp(2Kr_0)((\exp(T))^{B_3-2} - (\exp(-T))^{B_3-2}))}$$

Bibliografia

[*1*] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath. *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance 9, 203-228, 1999.

[*2*] A. Consiglio and A. Staino. *A Stochastic Programming Model forthe Optimal Issuance of Government Bonds*. Working Paper 15-08, Department of Statistics and Mathematics Silvio Vianelli, 2008.

[*3*] A.J. King. *Duality and martingales: a stochastic programming perspectiveon contingent claims*, Math. Program., Ser. B 91, 543-562, 2002.

[*4*] A. Pascucci, Wolfgang J. Runggaldier, *Finanza Matematica, teoria e problemi per modelli multiperiodali*, Springer, Dicembre 2001.