Studio del dominio e segno di una funzione polinomiale razionale

$$f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+5x+6}}$$

Il primo problema è quello di calcolare il dominio. Dobbiamo porci le solite tre domande:

1) Abbiamo un denominatore? Sì, allora va posto diverso da zero.

2) Abbiamo una radice? Sì, allora l'argomento della radice va posto maggiore o uguale di zero.

3) Abbiamo un logaritmo? No.

Dunque dobbiamo porre contemporaneamente il denominatore diverso da zero, e l'argomento della radice maggiore di zero. Dobbiamo quindi risolvere si seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+6} \neq 0 \\ x^2+5x+6 \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ora, analizzando la prima espressione, abbiamo che una radice vale zero quando il suo argomento vale zero, quindi il sistema si può trasformare in:

$$\begin{cases} x^2+5x+6 \neq 0 \\ x^2+5x+6 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Vogliamo che una stessa quantità sia contemporaneamente maggiore o uguale a zero e diversa da zero. ne segue che voglio che sia strettamente maggiore di zero. Dunque il nostro dominio è:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} | x^2+5x+6 > 0\right\}$$

Chiaramente questo devi scriverlo meglio, ovvero risolvere la disequazione. La soluzione dovrebbe essere:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x < -3, x > -2\}$$

Risolto il dominio, ora dobbiamo vedere il segno della funzione, ovvero capire per quali x la funzione è positiva e per quali è negativa. Poniamo dunque $f(x) \geq 0$ e studiamo la disequazione.

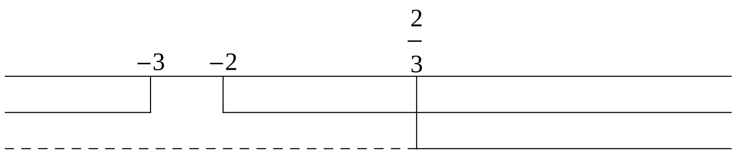
$$\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+5x+6}} \geq 0$$

Se ti ricordi dalla seconda, si studiano separatamente numeratore e denominatore e poi fai il grafico di segno. Dunque:

$$\text{Num} > 0 \quad 3x-2 > 0 \rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\text{Den} > 0 \quad \sqrt{x^2+5x+6} \rightarrow \forall x \in D$$

Dove la seconda espressione dipende dal fatto che la radice è sempre positiva, considerando però che il suo argomento deve essere maggiore di zero. In definitiva devi fare il seguente grafico,



dove la prima linea rappresenta il dominio e la seconda il segno del denominatore. Facendo l'intersezione delle soluzioni, abbiamo che:

$$f(x) > 0 \quad \text{con} \quad x > \frac{3}{2}$$

$$f(x) < 0 \quad \text{con} \quad -2 < x < \frac{3}{2} \text{ e } x < -3$$

Studiamo ora le intersezioni con gli assi, ovvero quando la funzione interseca gli assi cartesiani, che hanno equazione $x = 0$ per l'asse y e $y = 0$ per l'asse x. Per capire se la funzione interseca l'asse x bisogna dunque risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+5x+6}} \end{cases} \tag{3}$$

Dunque dobbiamo porre la funzione uguale a 0.

$$\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+5x+6}} = 0$$

Una frazione fa 0 quando il numeratore fa 0 (prova a pensare perchè), dunque la soluzione del sistema è $3x - 2 = 0$ ovvero $x = \frac{2}{3}$, che appartiene al nostro dominio e dunque è un punto ammissibile. La funzione passa dunque per $A = (\frac{2}{3}, 0)$ che è un punto che puoi segnare nel piano cartesiano. Vediamo ora l'intersezione con l'asse y. Il sistema sarà:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+5x+6}} \end{cases} \tag{4}$$

Otteniamo, sostituendo $x = 0$ alla funzione che $y = \frac{-2}{\sqrt{6}}$ che è un punto ammissibile per il dominio. Dunque $B = (0, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ è un altro punto del piano in cui passa la nostra funzione e possiamo dunque segnare nel piano. Abbiamo in definitiva trovato:

1) I valori di x che la funzione non può assumere,ovvero il dominio.

2)I valori di x per cui la funzione è positiva e quella per cui è negativa

3) I valori di x per cui la funzione vale 0 e l'intersezione della funzione con l'asse y.

Maturità 2004, sessione supplettiva, quesito 9

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log(2x - \sqrt{4x-1})$

Abbiamo un denominatore? No.

Abbiamo un logaritmo? Sì, dunque l'argomento va posto maggiore di zero e abbiamo una radice e dunque l'argomento va posto maggiore o uguale a zero. Il sistema per determinare il dominio diventa:

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{4x-1} > 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Concentriamoci sulla prima disequazione, che possiamo riscrivere come $\sqrt{4x-1} < 2x$. Questa rientra nella categoria delle disequazioni irrazionali studiate alla fine della seconda o all'inizio della terza. Ci sono due procedimenti diversi a seconda che la disequazione sia $\sqrt{A} > B$ o $\sqrt{A} < B$. In questo caso la soluzione della disequazione è data dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \\ 4x - 1 < (2x)^2 \end{cases} \tag{6}$$

La terza disequazione diventa:

$$4x - 1 < 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \rightarrow (2x-1)^2 > 0$$

Poichè è un prodotto notevole, ovvero il quadrato di binomio. Inoltre un quadrato è sempre positivo tranne quando fa zero, dunque la soluzione di questa disequazione è: $\forall\ x\ \in \mathbb{R} | x \neq \frac{1}{2}$. Dunque il sistema lo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

Dunque se rappresenti questi valori in un grafico, vedi che x deve essere contemporaneamente maggiore di 0 e di $\frac{1}{4}$, dunque $x \geq \frac{1}{4}$ e anche diverso da $\frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione della disequazione irrazionale è:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

Questa va messa a sistema con il la prima disequazione del sistema (5), ovvero $x \geq \frac{1}{4}$. Però vedi che le soluzioni non cambiano (basta fare un grafico di intesezioni) e dunque il dominio cercato per l'esercizio è:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \right\}$$