

Equazioni Irrazionali

Cercheremo di risolvere problemi di questo tipo:

$$\sqrt{3-x} = 2+x$$

Ricordiamo che il nostro obiettivo è trovare il valore numerico da dare alla x affinché l'equazione scritta sopra sia corretta. Per esempio, $x = 3$ non va bene, perchè a sinistra otteniamo $\sqrt{3-3} = 0$ mentre a destra otteniamo 5.

L'idea da utilizzare è la seguente: se due numeri sono uguali, allora anche elevandoli al quadrato rimangono uguali. Dunque potremmo elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione ed eliminare la radice, ottenendo una equazione che siamo in grado di risolvere (almeno fino al secondo grado).

Dunque l'unica cosa da capire è se siamo autorizzati ad elevare al quadrato, oppure se c'è qualche condizione di accettabilità della quale dobbiamo tenere conto. Per prima cosa sappiamo che l'argomento della radice (radicando) deve essere positivo, poichè la radice di un numero negativo non ha significato ($\sqrt{-2}$ dovrebbe darmi un numero che, elevato al quadrato, valga -2 . Ma nessun numero, elevato al quadrato, può essere negativo). Quindi questa è la prima condizione da porre.

Ve ne è poi un'altra: pensiamo all'equazione $\sqrt{x} = -5$. Se elevassimo al quadrato, otterremmo $x = (-5)^2$, ovvero $x = 25$. Sostituendo questo valore all'equazione di partenza, otteniamo $\sqrt{25} = -5$ che sappiamo non essere vero, perchè la radice di un numero positivo è un altro numero positivo. ($\sqrt{a} = b \leftrightarrow a = b^2$). Dunque anche il secondo membro dell'equazione deve essere positivo.

Riassumendo questo ragionamento, **quando vogliamo risolvere equazioni irrazionali del tipo**

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \tag{1}$$

con $A(x)$ e $B(x)$ due qualunque polinomi, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = (B(x))^2 \end{cases} \tag{2}$$

Complicando un po' le cose, come si risolve la seguente equazione irrazionale?

$$\sqrt[3]{3-3x} = 5x$$

In questo caso abbiamo una radice ad indice 3, ovvero dispari; sappiamo dunque che l'argomento della radice può essere negativo e che la radice di un numero negativo è un numero negativo ($\sqrt[3]{-27} = -3$). Dunque non abbiamo condizioni di accettabilità da porre. Per risolvere tale equazione, bisogna elevare entrambi i membri al cubo, in maniera da toglierci la radice e ottenere un'equazione polinomiale. Riassumendo:

$$\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \tag{3}$$

si risolve, provando a risolvere l'equazione polinomiale

$$A(x) = (B(x))^3 \tag{4}$$