Esercizio.

Data la funzione $f(x) = \frac{ax^2+bx}{cx-3}$ trovare, se esistono, i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione passi per il punto $A(1, 1)$, abbia la retta $x = 3$ come asintoto verticale e abbia un minimo nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

Svolgimento.

I parametri sono tre, dunque ho bisogno di tre condizioni. La prima sarà il punto di passaggio, la seconda l'asintoto verticale e la terza il punto di minimo. Sappiamo che un punto appartiene alla funzione se le coordinate del punto soddisfano all'equazione della funzione, dunque la condizione è sostituire $x = 1$ e $y = 1$ alla funzione (ovvero mettendo dentro le coordinate di A (in termini matematici occorre che $f(1) = 1$. Il conto diventa:

$$f(1) = 1 \leftrightarrow 1 = \frac{a(1) + b(1)}{c(1) - 3} \leftrightarrow c - 3 = a + b$$

Questa è la (prima) condizione alla quale devono soddisfare i parametri affinchè la funzione passi per il punto A.

Passiamo alla seconda condizione, ovvero che la retta $x = 3$ sia asintoto verticale. Sappiamo che se $lim_{x->c} f(x) = \inf$ allora la retta $x = c$ è asintoto orizzontale per la funzione $f(x)$. Nel nostro caso dunque occorre che

$$lim_{x->3} \frac{ax^2 + bx}{cx - 3} = \frac{9a + 3b}{3c - 3} = \inf$$

Un numero tende a più infinito solo se il denominatore tende a zero ($\frac{1}{0}'' ='' + \inf$). Dunque nel nostro caso occorre che $3c - 3 = 0$ ovvero $c = 1$.

Passiamo alla terza condizione. Sappiamo che abbiamo un punto di massimo o di minimo (in generale si dice un punto stazionario) solo se la derivata prima calcolata in quel punto vale 0. La condizione è quindi che $f'(-1) = 0$. Calcoliamo prima la derivata e poi sostituiamo il punto.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(cx - 3) - c(ax^2 + bx)}{(cx - 3)^2}$$

Sostituendo $x = -1$ e ponendola uguale a zero otteniamo

$$f'(-1) = 0 \leftrightarrow \frac{(-2a + b)(-c - 3) - c(a - b)}{(-c - 3)^2} = 0 \leftrightarrow 2ac - 3b - bc + 6a - ca + bc = 0$$

$$\leftrightarrow ca + 6a - 3b = 0$$

Dove il primo passaggio è dovuto al fatto che una frazione fa zero se il numeratore fa zero, mentre il secondo passaggio ho semplificato ciò che si poteva.

Dobbiamo ora unire le tre condizioni e risolvere il sistema che otteniamo. Mettendole insieme otteniamo

$$\begin{cases} c - 3 = a + b \\ c = 1 \\ ca + 6a - 3b = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $c = 1$ alle altre due, otteniamo

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 7a - 3b = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema di due equazioni a due incognite. Prova a risolverlo esplicitando una variabile dalla prima equazione ($a = -2 - b$ e sostituirla nella seconda $(7(-2 - b) - 3b) = 0)$. Dovresti ottenere $a = \frac{-3}{5}$ e $b = \frac{7}{5}$.