0.1 Probabilità: prime formule e applicazioni

Dato un evento A, definito su uno spazio di probabilità Ω (per esempio A=" Tiro il dado ed esce 3", quindi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) valgono le seguenti formule:

$$1)\ P(A) = 1 - P(A^c) \tag{1}$$

$$2) Se\ A \subseteq B\ P(B/A) = P(B) - P(A) \tag{2}$$

intendendo con B/A l'insieme degli elementi che stanno in B ma non in A. Per esempio se A=" esce 2 tirando un dado" e B="Esce un numero pari tirando un dado" allora $B/A = \{4, 6\}$.

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

Notiamo che se gli eventi sono disgiunti, per esempio A="Tiro un dado e esce 3" , B= " Tiro un dado ed esce 5" , $P(A \cap B) = 0$ poichè tirando lo stesso dado una sola volta è impossibile ottenere due numeri.

Dati due eventi, A, B definiamo la probabilita' condizionata nella seguente maniera:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4}$$

con la probabilità $P(A|B)$ che si legge "La probabilità che avvenga l'avvenimento A sapendo che si è verificato B".

Per esempio se A=" tiro un dado ed esce 5" e B=" tiro un dado ed esce un numero dispari" abbiamo che: $P(A|B)$ =" probabilità che esce 5 sapendo che è uscito un numero dispari (che sarà uguale a $\frac{1}{3}$, pensateci perchè), mentre $P(B|A)$=" probabilità che esca un numero dispari sapendo che è uscito 5" e avremo che $P(B|A) = 1$ poiche' 5 è un numero dispari.

Se due eventi sono indipendenti, nel senso che sapendo che si è verificato l'evento B non mi cambia la probabilità che si verifichi l'evento A avremmo che

$$P(A|B) = P(A) \tag{5}$$

ovvero, sostituendo questa uguaglianza nella precedente formula:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{6}$$

Scriviamo ora la formula di Bayes, quella che useremo negli esercizi (la possiamo ricavare dalle formule precedenti però l'importante è solo saperla usare)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{7}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \tag{8}$$

Esercizi

Svolgo ora un po' di esercizi (fax simile) di quelli che abbiamo fatto insieme. Nella risoluzione scriverò [...] usando (4) intendendo che userò la formula 4 (trovate sulla destra della formula il numero corrispondente)

Esercizio 1: Sia A=" tiro un dado ed esce 5" e B=" tiro un dado ed esce un numero dispari", calcolare $P(A|B)$.

Svolgimento

Sappiamo che $P(A) = \frac{1}{6}$ poichè devo indovinare un numero su 6; $P(B) = \frac{1}{2}$ poichè i numeri dispari in $[1,6]$ sono $\{1,3,5\}$ dunque 3 su 6. Abbiamo visto prima che $P(B|A) = 1$ poichè se so che è uscito 5 so automaticamente che è uscito un numero dispari. Ne segue che, usando 7,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{1 * 1/6}{1/2} = 1/3.$$

Esercizio 2 Dato un evento A, mostrare che $P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}$.

Svolgimento

Usando (1), sostituiamo $P(A^c)$ con $1 - P(A)$ in maniera da portarci tutto in una variabile.

$$P(A)P(A^c) = P(A)(1 - P(A)) = P(A) - P^2(A)$$

Dunque bisogna dimostrare che

$$P(A) - P^2(A) \leq \frac{1}{4} \leftrightarrow$$

$$4P^2(A) - 4P(A) + 1 \geq 0$$

Questa è un equazione di secondo grado in $P(A)$. Sostituendo $P(A) = t$ abbiamo che ($\Delta = 0$)

$$4t^2 + 4t + 1 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dunque la disuguaglianza è verificata per ogni valore di $P(A)$.

Esercizio 3

Due eventi soddisfano alle seguenti proprietà: $P(A) = 0.6$, $P(B^c) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.9$.

A e B sono stocasticamente indipendenti?

Svolgimento

Da (1) sappiamo anche che $P(A^c) = 0.4$ e $P(B) = 0.5$. Per sapere se sono indipendendi dobbiamo vedere se vale la (6). Abbiamo che:

$$P(A)P(B) = 0.3$$

Calcoliamo ora $P(A \cap B)$ tramite la formula (3)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2$$

Vediamo che le probabilità trovate sono diverse, quindi la (6) non è soddisfatta e dunque gli eventi non sono (stocasticamente) indipendenti, ma dipendono in qualche modo l'uno dall'altro.