# Revenue Management per il trasporto aereo

Francesco Castelli

Università di Padova

03 Giugno 2013

# Piano della presentazione

# Introduzione

- Fino al 1978 il trasporto aereo americano era regolato dalla Civil Areonautics Board, con prezzi alti e pressochè fissi.
- Dopo la deregolarizzazione, sono nate alcune compagnie "low-cost", che hanno abbassato notevolmente i prezzi dei biglietti, puntando sulla riduzione di costi e servizi.
- Questo ha portato alla nascita di tecniche di Revenue Management (RM), ovvero tecniche di gestione dei prezzi e delle disponibilità su tratte singole o multiple, con l'obiettivo di massimizzare i ricavi.

Il Revenue Management è applicabile sotto le seguenti condizioni

- Si sta vendendo una fissata quantità
- Il cliente prenota prima della partenza
- Il venditore ha a disposizione un insieme di classi di tariffe, ognuna con un prezzo fisso (almeno nel breve periodo)
- Il venditore può cambiare nel tempo la disponibilità delle classi

L'avvento di internet ha portato sostanziali modifiche alla gestione dei prezzi dei biglietti. Infatti si possono controllare e confrontare da casa ad ogni ora i prezzi dei biglietti tra le varie compagnie aeree. Un sistema di Revenue Management necessita dunque di:

- Previsioni probabilistiche della domanda futura
- Ottimizzazione che determini il limite ottimale di prenotazioni per ogni singola classe di viaggio

L'avvento di internet ha portato sostanziali modifiche alla gestione dei prezzi dei biglietti. Infatti si possono controllare e confrontare da casa ad ogni ora i prezzi dei biglietti tra le varie compagnie aeree. Un sistema di Revenue Management necessita dunque di:

- Previsioni probabilistiche della domanda futura
- Ottimizzazione che determini il limite ottimale di prenotazioni per ogni singola classe di viaggio

Misura dell'efficienza del RM

- Prima della deregolarizzazione, un viaggio aereo veniva considerato produttivo se viaggiava con almeno il 75% della capacità.
- Negli anni '80 si cercò di massimizzare il guadagno a miglio per passeggero, portando però ad un aumento eccessivo dei prezzi dei biglietti
- Un compromesso tra i due, ed una misura utilizzata ancora oggi, è il RAMS="revenue per available seat mile "
- Punti di debolezza: non dipende da come si distribuiscono i passeggeri tra le classi di viaggio e non tiene conto dei costi

| | Media tra le sei compagnie aeree più grandi | Southwest Airlines | JetBlue | AirTran | Media tra le tre compagnie low-cost |
|---|---|---|---|---|---|
| **RAMS** | **10.5** | **8.4** | **7.7** | **9.1** | **8.4** |
| CAMS | 11.1 | 7.5 | 6.3 | 8.5 | 7.4 |
| NET | -0.6 | 0.9 | 1.4 | 0.6 | 1.0 |

Analizzeremo ora tre tipi diversi di problema

- **Assegnazione della capacità** : supponendo di avere diverse classi di viaggio, quanti posti riservo per la classe di viaggio a prezzo maggiore? Quanti biglietti vendo a prezzo scontato?
- **Network Management**: Come gestire le prenotazioni nel caso di tratte multiple?
- **Overbooking**: Quante prenotazioni accettare oltre la capacità dell'aereomobile per poter ottimizzare i ricavi e coprirmi dal rischio di eventuali cancellazioni o non presentazioni?

Analizzeremo ora tre tipi diversi di problema

- **Assegnazione della capacità** : supponendo di avere diverse classi di viaggio, quanti posti riservo per la classe di viaggio a prezzo maggiore? Quanti biglietti vendo a prezzo scontato?
- **Network Management**: Come gestire le prenotazioni nel caso di tratte multiple?
- **Overbooking**: Quante prenotazioni accettare oltre la capacità dell'aereomobile per poter ottimizzare i ricavi e coprirmi dal rischio di eventuali cancellazioni o non presentazioni?

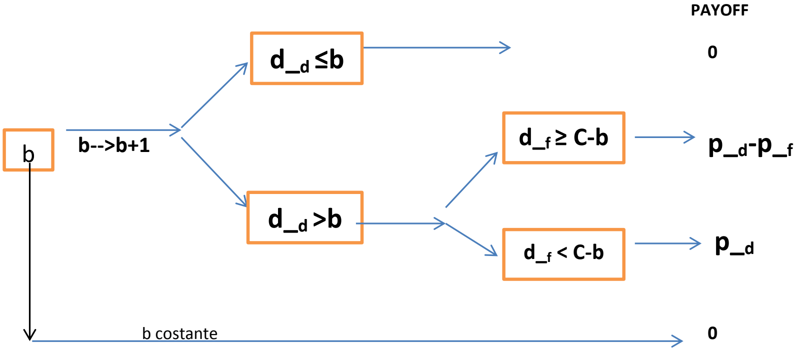
Analizzeremo ora tre tipi diversi di problema

- **Assegnazione della capacità** : supponendo di avere diverse classi di viaggio, quanti posti riservo per la classe di viaggio a prezzo maggiore? Quanti biglietti vendo a prezzo scontato?
- **Network Management**: Come gestire le prenotazioni nel caso di tratte multiple?
- **Overbooking**: Quante prenotazioni accettare oltre la capacità dell'aereomobile per poter ottimizzare i ricavi e coprirmi dal rischio di eventuali cancellazioni o non presentazioni?

Supponiamo che i clienti che comprano la tariffa più bassa prenotino prima di quelli a tariffa più alta.
Vogliamo capire quanti posti assegnare con tariffa più bassa, sapendo che che avremo una futura domanda aleatoria per la tariffa più alta.
**Problema delle due classi**:

- Ci sono clienti che prenotano prima ad una tariffa più bassa, $p_d$, la domanda per questa tariffa è $d_d$
- Ci sono clienti che prenotano dopo ad una tariffa più alta $p_f$, la domanda per questa tariffa è $d_f$
- $C$ è la capacità totale dell'aereomobile
- $F_d(x) = P(d_d \leq x)$
- $F_f(x) = P(d_f \leq x)$
  L'aleatorietà è data da $d_d$ e da $d_f$

Supponiamo di aver messo un limite $b$ sui biglietti a prezzo scontato. Cosa succede se porto questo limite a $b+1$?



Chiamando $h(b)$ la funzione che, fissati $b$ posti a prezzo scontato, calcola il guadagno (atteso) nel caso volessi aggiungerne uno, si ottiene:

$$E[h(b)] = p_d(1 - F_d(b))(F_f(C - b)) + (p_d - p_f)(1 - F_d(b))(1 - F_f(C - b))$$

$$= [1 - F_d(b)](p_d - p_f + p_f F_f(C - b))$$

Se il valore atteso di questa operazione è positivo, allora ha senso dunque aumentare di uno il numero dei biglietti in sconto, altrimenti no. Il primo fattore è sempre positivo, dunque il segno dipende dal secondo fattore. Riassumendo

- Se $p_d \leq p_f(1 - F_f(C - b))$ allora non cambio la disponibilità dei posti
- Se $p_d \geq p_f(1 - F_f(C - b))$ allora aumento la disponibilità dei biglietti in sconto di un posto

Potremmo iterare questo procedimento, partendo da $b = 0$ ed continuare ad aggiungere un posto fino a che la condizione $p_d \leq p_f(1 - F_f(C - b))$ non è verificata.
Considerando però che la $F_f(C - b)$ è una funzione di ripartizione, quindi crescente nel suo argomento, arriviamo al seguente risultato

**Regola di Littlewood**

Il numero di posti ottimale $b^*$ da riservare a prezzo scontato è dato dalla risoluzione della seguente equazione

$$1 - F_f(C - b^*) = \frac{p_d}{p_f}$$

**Esempio numerico**:
Supponiamo che la domanda a prezzo pieno sia distribuita normalmente

$$F_f(x) = \Phi(\frac{x - \mu_f}{\sigma_f})$$

$$\mu_f = \text{valore atteso di } d_f \quad \sigma_f = \text{varianza di } d_f$$

Allora abbiamo che

$$b^* = [C - \sigma_f \Phi^{-1}(1 - \frac{p_d}{p_f}) - \mu_f]^+$$

Se supponiamo di avere $n$ classi di viaggio, ognuna con un suo prezzo $p_i$ $i = 1, \cdot, n$ (supponiamo la classe 1 abbia il prezzo più alto) e con una domanda $d_i$ $i = 1, \cdot, n$, la situazione si complica molto, perchè aggiungendo un posto ad una classe $i$-esima, lo stiamo togliendo ad una qualunque classe di prezzo superiore a lei, e dunque dovremo introdurre delle nuove variabili aleatorie $q_{ij}$ con $j > i$, ovvero la probabilità che aggiungendo un posto alla classe $i$-esima, lo sto togliendo alla classe $j$-esima. Questo complica molto la situazione.
La programmazione dinamica porta ad una soluzione precisa, ma in un tempo di calcolo troppo elevato.
Per quanto detto prima, occorre che le compagnie aeree abbiano a disposizione strumenti efficaci ed immediati per il calcolo dei posti da riservare alle varie classi di viaggio. Per questo, nella realtà, viene utilizzata spesso una tecnica euristica ma con un risultato soddisfacente.

**EMSR/ Guadagno marginale atteso per posto** Per calcolare i posti da riservare alla classe $j$-esima, si crea una classe fittizia, la cui domanda è la somma delle domande attese per le classi di viaggio superiore alla $j-esima$, il prezzo sarà il prezzo medio pesato e poi si usa la regola di Littlewood tra la classe $j-esima$ e quella fittizia.
Supponiamo le domande siano distribuite normalmente, con media $\mu_i,\ i=1,....,n$ varianza $\sigma_i\ i=1,....,n$. Supponiamo di essere nel periodo $j\geq 2$ e di voler calcolare $b_j$ Creiamo la classe artificiale

$$\mu=\sum_{i=1}^{j-1}\mu_i \quad \sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{j-1}\sigma_i^2} \quad p=\frac{\sum_{i=1}^{j-1}p_i\mu_i}{\mu}$$

Dunque, usando la formula di Littlewood

$$b_j=[C_j-\sigma\Phi^{-1}(\frac{p-p_j}{p})-\mu]^+$$

dove $C_j$ rappresenta la capacità dell'aereo quando sto calcolando la classe $j-esima$, ovvero $C_j=C-\sum_{i=j+1}^{n}x_i$ con $x_i$ le domande accettate per la classe di viaggio $i-esima$

**Esempio: Alitalia ROMA-JFK** 9.00 – 12.55 **1 AGOSTO**
**Classica plus:** Prezzo $p_3 = 1916$ euro, media attesa $\mu_3 = 180$ persone, varianza $\sigma_3 = 30$;
**Economy**:Prezzo $p_2 = 2229$ euro, media attesa $\mu_2 = 115$ persone, varianza $\sigma_2 = 25$;
**Business**: Prezzo $p_1 = 3526$ euro, media attesa $\mu_1 = 55$ persone, varianza $\sigma_1 = 15$;
**Aereomobile**: BOING 777 capacità $C = 293$
Con la tecnica $EMSR - b$ calcoliamo la classe fittizia per calcolare quanti posti riservare per la classica:

$$\mu = \mu_2 + \mu_1 = 170, \quad \sigma = \sqrt{(\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2} = 40 \quad p = \frac{p_1\mu_1 + p_2\mu_2}{\mu} = 2649$$

dunque

$$b_3 = [C - \mu - \sigma\Phi^{-1}(\frac{p - p_3}{p})]^+ = 147$$

Per calcolare quanti posti risevare per la Economy, supponiamo di ricevere almeno 147 richieste per la Classica (ipotesi più che attendibile) in maniera tale che assegniamo tutti i posti che avevamo riservato. Aggiornando i dati,

$$\mu = \mu_1 \quad p = p_1 \quad \sigma = \sigma_1 \quad C = 293 - 147 = 146$$

$$b_2 = [C - \mu - \sigma\Phi^{-1}(\frac{p - p_2}{p})]^+ = 97$$

Dunque la soluzione ottimale, ricordando che siamo sotto l'ipotesi che la classe di viaggio con prezzo più basso prenota prima, è data da:
**Riservare** 147 **posti per la Classica,** 97 **per l'Economy, così che i clienti della Business avranno a disposizione** 49 **posti.**

## Generalizzazioni

- Abbiamo fino ad adesso considerato la situazione in cui le domande per le due classi di prezzo sono indipendenti. Definiamo $\alpha$ la percentuale delle persone che, non trovando biglieti a prezzi scontati, decidono di prenderli a prezzi pieni. Dunque la domanda $d_f$ per i biglietti a prezzo pieno diventa

  $$\hat{d}_f = d_f + \alpha[d_b - b]^+$$

  Svolgendo analoghi conti troviamo che la regola di Littlewood diventa trovare $b^*$ tale che

  $$F_f(C - b^*) = 1 - (\frac{1}{1-\alpha})(\frac{p_d}{p_f} - \alpha)$$

- Spesso la misura *RAMS* risulta incompleta o comunque non dice completamente se il *RM* porta buoni risultati. Una alternativa è usare la *ROM* (revenue opportunity model) definita come

  $$ROM = \frac{\text{guadagno raggiunto} - \text{guadagno senza RM}}{\text{guadagno perfetto} - \text{guadagno senza RM}}$$

## Generalizzazioni

- Abbiamo fino ad adesso considerato la situazione in cui le domande per le due classi di prezzo sono indipendenti. Definiamo $\alpha$ la percentuale delle persone che, non trovando biglieti a prezzi scontati, decidono di prenderli a prezzi pieni. Dunque la domanda $d_f$ per i biglietti a prezzo pieno diventa
$$\hat{d}_f = d_f + \alpha[d_b - b]^+$$
Svolgendo analoghi conti troviamo che la regola di Littlewood diventa trovare $b^*$ tale che
$$F_f(C - b^*) = 1 - (\frac{1}{1-\alpha})(\frac{p_d}{p_f} - \alpha)$$
- Spesso la misura *RAMS* risulta incompleta o comunque non dice completamente se il *RM* porta buoni risultati. Una alternativa è usare la *ROM* (revenue opportunity model) definita come
$$ROM = \frac{\text{guadagno raggiunto} - \text{guadagno senza RM}}{\text{guadagno perfetto} - \text{guadagno senza RM}}$$

## Network Management

Il ragionamento appena fatto non va più bene se abbiamo a disposizione risorse multiple, per esempio voli di connessione. Non possiamo semplicemente ragionare in termini di prezzo, ma devo considerare tutte le possibili combinazioni e i guadagni attesi.
Facciamo un esempio:
**Volo1**: Venezia-Roma, costo 200 euro
**Volo2**: Roma-Catania, costo 160 euro
**Volo1+Volo2**: Venezia-Catania, costo 300 euro
Supponiamo di avere un solo posto libero in ognuno dei due aerei e che una persona voglia prenotare il volo Venezia-Catania con scalo a Roma ed è quindi disposto a pagarmi 300 euro. Accetterò solo se

$$200p_1 + 160p_2 < 300$$

dove $p_1$=probabilità di ricevere una prenotazione per il volo 1 e analogamente per $p_2$

Un buon approccio, sotto l'ipotesi di conoscere con certezza la domanda futura per tutte le possibili classi di viaggio, è dato dalla **programmazione lineare**. Infatti

- Genera una soluzione ottimale
- Può essere un buon punto di partenza per una soluzione completa, che verrà poi migliorata tenendo conto dell'aleatorietà.

Nella realtà vengono utilizzate tecniche di programmazione lineare stocastica per tenere conto dell'aleatorietà, oppure il "virtual nesting", dove ogni prodotto è mappato dentro una classe virtuale, che non tiene conto solo del prezzo, e una prenotazione viene accettata solo se c'è disponibilità in quella classe, disponibilità calcolata tramite allocazione con il metodo precedente.

## Implementazione

Consideriamo $m$ risorse (per esempio capacità dell'aereo) ed $n$ possibili prodotti. Indicizziamo con $i$ le risorse e con $j$ i prodotti. Per ogni tratta di volo si avrà un prezzo $p_j$ e avremo una domanda che conosciamo con certezza $d_j$ e della quale ne soddisferemo $x_j$. Ogni risorsa ha un vincolo $c_i$. Introduciamo la seguente variabile

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il prodotto } j \text{ usa la risorsa } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il problema di Programmazione lineare diventa dunque

$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq c_i \quad \forall i$$

$$0 \leq x_j \leq d_j \quad \forall j$$

## esempio di volo Alitalia con 4 classi di viaggio

| Combinazioni | Classi di viaggio | Tariffa | Domande | Allocazioni |
|---|---|---|---|---|
| Venezia-Catania | Promo | 91.04 | 45 | **3** |
| 6.25-9.55 | Facile | 128.04 | 25 | **25** |
| 1 agosto | Comoda | 302.04 | 10 | **10** |
| 100 posti | Libera | 445.04 | 5 | **5** |
| Venezia-Roma | Promo | 51.84 | 25 | **25** |
| 6.25-7.30 | Facile | 107.81 | 18 | **18** |
| 1 agosto | Comoda | 333.81 | 8 | **8** |
| 100 posti | Libera | 428.81 | 4 | **4** |
| Roma-Catania | Promo | 101.40 | 30 | **30** |
| 8.30-9.55 | Facile | 122.40 | 15 | **15** |
| 1 Agosto | Comoda | 297.40 | 9 | **9** |
| 100 posti | Libera | 417.40 | 3 | **3** |

## Overbooking

L'overbooking consiste nel vendere più unità di quelle che si hanno a disposizione.

- Fino al 1990 non c'era una penalità nel caso di non presentazione o di cancellazione della prenotazione
- Si stima che, nonostante il sold-out, AA viaggiasse con il 15% dei posti vuoti e che il 50% delle prenotazione venisse cancellato.
- Autorizzati all'overbooking per proteggersi contro le possibili perdite, AA ha stimato un guadagno di 225 milioni di dollari nel 1990 grazie all'overbooking
- Nonostante quasi tutte le compagnie aeree al momento applichino penali in caso di cancellazione, ancora adesso è una pratica usata in particolare per massimizzare il profitto.

Nel caso in cui la compagnia "sbagliasse i conti", c'erano passeggeri che venivano rifiutati nonostante avessero un biglietto in mano, e sono nate delle regolazioni anche in questo caso.

**Come calcolare il numero di unità in più da vendere in maniera da massimizzare il guadagno?** Sono quattro le tecniche che vengono utilizzate di più:

1. **Metodo Euristico**: calcolare un limite di prenotazioni in base alla capacità e alle non presentazioni attese
2. **Metodo basato sul rischio**: Stime esplicite del costo del servizio negato, pesando questi costi rispetto al guadagno potenziale
3. **Politica di livello**: Per esempio volere, in media, al massimo un servizio negato ogni tot passeggeri serviti
4. **Metodi ibridi**: Un metodo basato sull'unione dei tre metodi precedenti.

**Descrizione del modello**

- Fissata capacità $C$
- Limite massimo di prenotazioni fissato in $b$ (chiaramente $b \geq C$)
- Il giorno del volo, i clienti con prenotazione che arrivano pagano un prezzo $p$
- Se il numero di clienti che arriva è minore di $C$ allora tutti prenderanno posto, altrimenti prenderanno posto solo $C$ e al resto delle persone verrà offerta una compensazione $D$ ($D > p$).

Supponiamo inoltre che non ci siano cancellazioni, altrimenti $b$ potrebbe variare nel tempo

**Problema**

Determinare $b$ in maniera da massimizzare il guadagno atteso.

**Metodo Euristico**

Una compagnia aerea ha visto che il tasso di persone che si presentano è $\rho$. Dunque fissa $b = \frac{C}{\rho}$. Viene usata ancora adesso in molte compagnie

**Metodo rischioso**

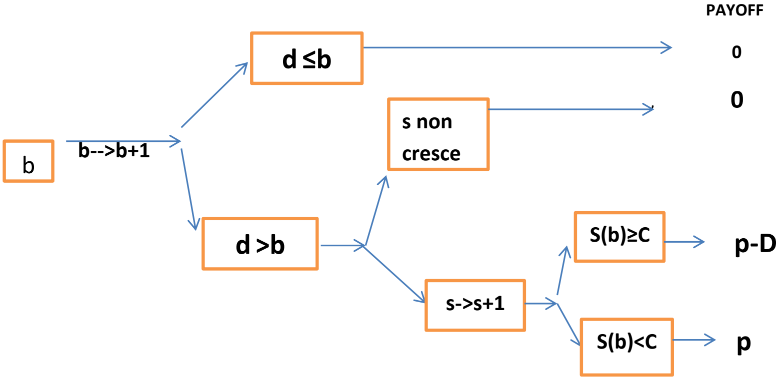
Sia $d$ la domanda totale ricevuta. Poniamo inoltre

$$n(b) = \min(b, d) \qquad x(b) = n(b) - s(n(b))$$

dove $s(n(b))$ è il numero di persone che si presentano. Dunque $x(b)$ è il numero di persone che non si presentano. Sia $\rho = \frac{s(n(b))}{n(b)}$ il tasso di persone che si presenta. Il guadagno netto per il volo è dato dunque da

$$R = p * s(n(b)) - D * [s(n(b)) - C]^+$$

Supponiamo di aver messo un limite $b$ di prenotazioni. Cosa succede se lo aumentiamo a $b+1$?



Se il valore atteso di questa operazione è positivo, allora ha senso effettuare l'operazione, altrimenti no. Calcolandolo,

$$E[h(b)] = [1 - F(b)]\rho[(p - D)P(s(b) \geq C) + p(1 - P(s(b) \geq C) =$$

$$= \rho[1 - F(b)][p - DP(s(b) \geq C)]$$

dove $P(s(b) \geq C)$ è la probabilità che, fissate $b$ prenotazioni massime, il numero di persone che arriva è maggiore od uguale alla capacità $C$ . Poichè al crescere di $b$ cresce $s(b)$ e dunque cresce anche la probabilità, abbiamo

## Regola

Il limite massimo di prenotazioni ottimo, $b^*$, deve soddisfare a

$$P(s(b^*) > C) = \frac{p}{D}$$

Sotto l'ipotesi che ogni persona si presenta con un tasso $\rho$ indipendentemente dalle altre, avremo che $s(n(b))$ segue una distribuzione binomiale.

$$P(s(n(b)) = x) = \binom{n(b)}{x} \rho^x (1-\rho)^{n(b)-x}$$

Inoltre

$$P(s(n(C)) \geq C) = [1 - F(C-1)]\rho^C$$

Infatti, fissato un limite di $C$ prenotazioni, la probabilità che le persone che si presentano non siano minori di $C$ è data dal fatto che devo avere almeno $C$ prenotazioni e che tutte le persone che si prenotano si presentino. Notiamo inoltre che

$$P(s(n(b+1)) \geq C) - P(s(n(b)) \geq C) = \rho[1 - F(b)]P(s(b) = C-1)$$

infatti, affinche l'evento si verifichi devo avere:

1. che il numero di prenotazioni sia almeno $b$
2. che la persona che aggiungo al limite di prenotazioni si presenti
3. che, fissando il limite di $b$ prenotazioni, si presentano esattamente $C-1$ persone

Poichè, per quanto visto nella slide precedente,

$$P(s(b) = C - 1) = \binom{b}{C-1} \rho^{C-1} (1-\rho)^{b-C+1}$$

Abbiamo il seguente metodo di risoluzione:

**Algoritmo per il limite ottimo di prenotazioni**

1. Poniamo $b = C$ e $P(s(n(b)) \geq C) = [1 - F(C)]\rho^C$
2. Se $P(s(n(b)) \geq C) = \frac{p}{D}$ poni $b^* = b$ e stop.
3. Altrimenti, $b -> b + 1$ e $P(s(n(b+1)) \geq C) =$

$$P(s(n(b)) \geq C) + [1 - F(b+1)] \binom{n}{C-1} \rho^C (1-\rho)^{b-C+1}$$

e torna al passo 2.

**Politica di livello** Notiamo che $P(s(n(b)) \geq C+1)$ è la probabilità che, posto un limite massimo di $b$ prenotazioni, si presentino almeno $C+1$ persone e dunque che almeno ad una persona debba essere negato l'imbarco. Ecco allora che se le compagnie aeree cercano di guadagnarci provando ad arrecare meno danno possibile al cliente, potrebbero scegliere $b^*$ tale che, fissato $\epsilon$ piccolo,

$$P(s(n(b^*)) \geq C+1) \leq \epsilon$$

**Overbooking con più classi di viaggio** Nel caso di più classi di viaggio, una strategia utilizzata è di considerare il prezzo medio, pesato per la domanda media per ogni classe $\hat{p} = \frac{\sum_i \mu_i p_i}{\sum_i \mu_i}$ e di trovare il limite massimo di prenotazioni $b$ per l'intero volo. Dopodiché, si calcolano quanti posti vincolare per ogni tariffa secondo gli algoritmi visti precedentemente, considerando $b$ come capacità invece della reale $C$.

**Alternative all'overbooking**
L'overbooking può far ottenere un buon guadagno alla compagnia aerea, ma può risultare scomodo e controproducente. Vi sono alcuni metodi alternativi attualmente utilizzati dalle compagnie:

- "Prenotazioni in standby", in cui si vende il biglietto a prezzo molto ridotto, ma si ha la garanzia del posto solo una volta arrivati in aereoporto
- Se si hanno molte richieste, sopratutto in classi di viaggio a prezzo alto, si chiama il cliente che ha già prenotato offrendogli una compensazione per prendere il successivo volo
- Vengono messe penali (anche del 100%) in caso di cancellazione o non presentazione al check-in

## Conclusioni

- Alla base di tutto il RM ci vuole un'ottima analisi storica dei dati e delle previsioni attendibili della domanda futura
- Un ottimo RM può portare la compagnia ad un aumento degli ricavi del 5/8%
- Può essere generalizzato anche ad hotel, rental cars, crociere, teatri, stadi
- Sono molte le tecniche euristiche o di approssimazione: è un problema aperto cercare modelli che forniscano risultati precisi in un tempo di calcolo breve

# Riferimenti bibliografici


Robert Phillips
Pricing and Revenue Optimization
*2005*

Voneche Frederic
Yield Management in The Airline industry
*2007*