# Capitolo 1

# Calcolo Combinatorio

Dato un insieme $A = \{a_1, ..., a_n\}$, e dato $k \in \mathbb{N}$ con $k < n$, i sottoinsiemi di A con cardinalità k si chiamano "combinazioni di k elementi estratti da $A$". Per esempio, dato $A = \{1, ..., 90\}$ i numeri del lotto, se $k = 5$ allora le combinazioni di 5 elementi estratti da $A$ sono esattamente le possibili cinquine che si possono ottenere, ovvero insiemi del tipo $B = \{a_1, ..., a_5\}$ con $a_i \in [1, 90]\ \forall i$. Questo numero si calcola con una formula relativamente semplice (chiamato coefficiente binomiale):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$

Dunque, per esempio, se ci chiedessimo date 20 squadre, quante possibili coppie possiamo prendere, si ha: $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20*19*18!}{2*18!} = 190$ che sono esattamente tutte le partite che vi sono in un girone di andata di serie A (infatti il coefficiente non tiene conto dell'ordine, dunque l'insisme $\{Inter, Milan\} = \{Milan, Inter\}$.

Quale è la probabilità di giocare una cinquina al lotto e di fare cinquina? Chiaramente la probabilità sarà uniforme, essendo il gioco uniforme (vuol dire che la cinquina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avrà la stessa probabilità di uscire della cinquina $\{86, 87, 88, 89, 90\}$ Dunque questa probabibilità sarà data al numeratore dalle cinquine giocate che mi fanno vincere e al denominatore dall'insieme di tutte le possibili cinquine. In formule, avremo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega!} \tag{1.2}$$

con A che sara l'insieme formato dalle possibili cinquine vincenti e $||\Omega|$ il numero di tutte le cinquine possibili. Dunque usando il coefficiente binomiale

$$|\Omega| = \binom{90}{5} = \frac{90 * 89 * 88 * 87 * 86 * 85!}{5 * 4 * 3 * 2 * 85!} = 43949268$$

Dunque, se gioco una sola cinquina (per esempio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) la probabilità di vittoria sarà $\frac{1}{43949268} = 2.28 * 10^( - 8)$ una probabilità chiaramente molto bassa. Senza ricorrere al coefficiente binomiale si poteva ragionare anche in questa maniera: al primo numero estratto ho una probabilità di $\frac{5}{90}$ che venga estratto un mio numero; alla seconda estrazione un altro mio numero verrà estratto con probabilità $\frac{4}{89}$, il terzo numero verrà estratto con prob. $\frac{3}{88}$, il quarto con prob. $\frac{2}{87}$ e il quinto con prob. $\frac{1}{86}$. Data l'indipendenza delle estrazione, ricordando che la probabilità dell'intersezione di eventi indipendenti è il prodotto delle probabilità abbiamo che la probabilità di fare cinquina è $\frac{5*4*3*2/1}{90*89*88*87*89}$ che coincide con quella trovata prima.

Vediamo ora come risolvere i problemi delle urne contenente palline di diversi colori, nel caso di reimmissione e nel caso di non reimissione. Supponiamo di avere $N$ PALLINE, di cui $m$ ROSSE e $N-m$ VERDI ed facciamo $n$ estrazioni successive. Vogliamo capire quale è la probabilità che esattamente $k$ di queste palline estratte (dunque $k < n$) siano rosse.

**Con reimmissione** Usando la formula precedente abbiamo che:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega!} \tag{1.3}$$

con $|A|$ che rappresenta l'insieme delle disposizioni che hanno esattamente $k$ palline rosse (dunque l'insieme delle "vincite") e $|\Omega|$ l'insieme di tutte le possibili estrazioni. Cerchiamo di calcolare $|\Omega|$. Poichè reinserisco ogni volta la pallina, ad ogni estrazione ho sempre $N$ palline disponibili. Poichè effettuo $n$ estrazioni, alla fine avrò $N^n$ possibili scelte.

Calcoliamo ora $|A|$. Devo scegliere $k$ palline rosse su $n$ totali. Le possibili scelte sono date dal coefficiente binomiale, ovvero $\binom{n}{k}$. Scelte queste, poi le palline rosse possiamo estrarle nell'ordine che vogliamo. Dovendo estrarne $k$ e avendone a disposizione $m$ avremmo che le possibili scelte sono $m^k$. Ora dobbiamo disporre le verdi. Analogo discorso, ne dovremmo estrarre $n-k$ e ne abbiamo a disposizione $N-m$ e quindi avremmo $(N-m)^{n-k}$.

Riassumendo, le possibili estrazioni di $k$ palline ROSSE con $n$ estrazioni sono:

$$|A| = \binom{n}{k} m^k (N-m)^{n-k}$$

Dunque la probabilità, usando la formula precedentemente scritta è data da:

$$P(A) = \binom{n}{k} \frac{m^k (N-m)^{n-k}}{N^n} \tag{1.4}$$

**Senza reimmissione** Quello che cambia è che non abbiamo più a disposizione sempre $N$ palline, ma ad ogni estrazioni calano di una. Dunque $|\Omega|$ saranno le possibili estrazioni di $n$ palline su un totale di $N$, dunque:

$$|\Omega| = \binom{N}{n}$$

Per quanto riguarda le possibili estrazioni di $k$ palline rosse in $n$ estrazioni, devo calcolare le possibili combinazioni di $k$ palline su $m$, visto che nell'urna ho $m$ palline rosse. E questo è dato da $\binom{m}{k}$. Analogamente, dovrò estrarre $n-k$ palline verdi e ne ho a disposizione $N-m$ dunque le combinazioni per le palline verdi sono $\binom{N-m}{n-k}$.

Riassumendo:

$$|A| = \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$$

E quindi la probabilità finale è data da:

$$P(A) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}\binom{N}{n}} \tag{1.5}$$

La teoria è un po' difficile, però se vi mettete con qualche disegno riuscite a capirla abbastanza agevolmente (è molto applicativa, basta ragionarci un po' su e le formule sono "standard").

**Esercizi**

**Esercizio 2 19 Gennaio 2010.**

. In a class of 20 students there are 8 males. Suppose to draw at random and without replacement a sample of 3 students. What is the probability of observing at least one female in the sample?

RISOLUZIONE

In totale abbiamo 20 studenti, 12 femmine e 8 maschi. Si prendono tre studenti senza "reimissione' (pensiamo agli studenti come palline). La probabilità di osservare almeno una femmina è uguale a 1-la probabilità di non osservare nessuna femmina. Infatti, sia $A$="pesco almeno una femmina" allora $A^c$="non pesco nessuna femmina". Calcoliamo $P(A^c)$. Le possibili combinazioni di 3 studenti su 20 è dato da $\binom{20}{3}$ che coinciderà con $|\Omega|$ La probabilità di non pescare una femmina è la probabilità di pescare 3 maschi in 3 estrazioni. Dunque, avendo a disposizione 8 maschi, ne devo pescare 3 su 8, dunque le possibili combinazioni sono $\binom{8}{3}$. Non dobbiamo estrarre nessuna femmina, dunque non abbiamo nessun altro fattore di scelta. Riassumendo:

$$P(A^c) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}}$$

**Esercizio 2, 5 May 2010** A box contains 10 identical balls numbered $\{1; 2, ...; 10\}$. We draw one ball after the other at random and with replacement. We stop when we observe for the first time a prime number. What is the probability of exactly three trials?

RISOLUZIONE

In questo caso le palline ROSSE sono le palline con i numeri primi, ovvero $R = \{3, 5, 7\}$ e le palline VERDI tutte le altre $V = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$. Estraiamo una palla dopo l'altra con reimmissione. Devo calcolare la probabilità di effettuare tre estrazione, ovvero che alla terza estrazione trovo un numero primo, mentre nelle prime due trovo un numero non primo. Facendo l'esempio con le palline, voglio calcolare la probabilità di estrarre due palline verdi nellle prime due estrazioni e una rossa alla terza estrazione. Calcoliamo $|\Omega|$. Ho 10 palline a disposizione sempre, devo fare tre estrazioni, dunque in totale avrò $10^3$ possibili estrazioni. Quindi: $|\Omega| = 10^3$. Calcoliamo ora $|A|$="ESTRAGGO DUE PALLINE VERDI E LA TERZA E' ROSSA. Avendo 7 palline verdi a disposizione e dovendo sceglierne 2, le possibili combinazioni sono $7^2$. Avendo 3 palline rosse e dovendone sceglierne 1, le combinazioni sono date da $3^1$. Riassumendo: $|A| = 7^2 * 3^1$.

La probabilità cercata è:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7^2 3^1}{10^3} = 0.147$$

Notiamo che a differenza della spiegazione nella parte teorica, qui il coefficiente binomiale non c'è: infatti mi chiedono che le prime due siano verdi e la terza rossa, dunque un ordine esatto.

Se la domanda fosse stata: calcola la probabilità che nelle prime tre estrazioni ci siano due palline verdi e una rossa (quindi vale estrarre per prima la rossa e dopo le due verdi) allora bisogna aggiungere il coefficiente binomiale. In questo caso sarebbe $\binom{3}{2}$ poichè su 3 estrazioni posso scegliere la combinazione delle due verdi( e scegliendo dove stanno le due verdi, quella rossa viene automaticamente). Dunque la soluzione (se la domanda fosse stata questa) sarebbe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \binom{3}{2} \frac{7^2 3^1}{10^3} = 0.441$$

**Esercizio 1,2 July 2010**

A box contains 15 white balls numbered $\{1, ..., 15\}$, 5 black balls numbered $\{1, .., 5\}$ and 5 red balls numbered $\{1.., 5\}$. A ball is drawn at random from the box. Compute $P(A \cup B)$, where A : white colour; B : even number

RISOLUZIONE:

Per le formule che conosciamo dalla prima parte si ha che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Vale sempre la formula che :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

e analogamente per $B$. Il coefficiente binomiale lo usiamo quando abbiamo combinazioni di possibili estrazioni. Poichè effettuiamo una sola estrazione, non esistono possibili combinazioni, o estraggo una pallina rossa, o verde o bianca. In totale ho 25 palline, dunque abbiamo che:

$$P(A) = \frac{15}{25} = 0.6$$

Infatti, ho 15 palline bianche su 25 totali; la probabilità di estrarne una bianca è data dal rapporto tra il numero di palline bianche e il numero di palline totali. Un ragionamento analogo si può fare per l'evento $B$. Quante sono le palline dispari? Per quanto riguarda le bianche dispari saranno $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, per quelle rosse saranno $\{1, 3, 5\}$ e analogamente per quelle verdi, che saranno $\{1, 3, 5\}$. In totale avrò quindi 14 palline dispari su 25 (basta sommare quelle dispari bianche verdi e rosse). La probabilità di pescare una pallina dispari sarà dunque

$$P(B) = \frac{14}{25} = 0.56$$

Bisogna calcolare $P(A \cap B)$, ovvero la probabilità di estrarre una pallina bianca dispari. Poichè le palline bianche dispari sono $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, dunque in totale sono 8, avremmo che:

$$P(A \cap B) = \frac{8}{25} = 0.32$$

Riassumendo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.56 - 0.32 = 0.84$$

**Esercizio 2,17 June 2010**

In a university class there are 30 students, 10 males and 20 females. We choose at random and without replacement a sample of 6 students. What is the probability that in the sample there is at least one male?

RISOLUZIONE

Questo è identico a uno degli esercizi precedenti. L'evento di avere almeno un maschio è uguale a 1-l'evento di non avere nessun maschio, ovvero di estrarre solo femmine. Portiamo il problema in termini di palline.

Abbiamo 30 palline totali, 10 ROSSE e 20 NERE. Vogliamo calcolare la probabilità di estrarre 6 NERE su 6 estrazioni. L'insieme $|\Omega|$ sarà dato dalle possibili scelte di 6 palline su 30 totali, ovvero $|\Omega| = \binom{30}{6}$. L'insieme $|A|$ sarà dato dalle possibili scelte di 6 palline nere su 20 totali nere che ho a disposizione, dunque $|A| = \binom{20}{6}$.

Riassumendo, abbiamo che

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} = \frac{38760}{593775} = 0.06$$

Quindi il risultato dell'esercizio è $1 - P(A) = 0.96$

**Esercizio 2,16 May 2011** In a class of 25 students there are 10 females. Suppose to draw at random and without replacement a sample of 5 students. What is the probability that in the sample there is just one female?

RISOLUZIONE: La lascio a voi, anche questo è identico all'esercizio precedente. Il risultato giusto dovrebbe essere 0.9434..

**Esercizio 2,30 May 2011** A box contains 5 black balls, 10 red balls and 5 white balls. Consider a random sample of 5 balls (sampling without replacement). What is the probability that in the sample there are 2 red balls?

RISOLUZIONE:

Non abbiamo reimmissione ed estraiamo 5 palline su 20 totali. Dunque $|\Omega|$, ovvero l'insieme di tutte le possibili estrazioni di 5 palline su 20 è dato da $\binom{20}{5}$.

$$|\Omega| = \binom{20}{5}$$

Calcoliamo ora la probabilità di estrarre due palle rosse. Devo quindi estrarre due palline rosse e tre di un qualsiasi altro colore. Le possibili combinazioni di 2 palline rosse su 10 totali che ne ho a disposizione è dato da $\binom{10}{2}$. Le possibili combinazioni di tre altre palline su 10 totali (5 verdi + 5 nere) è dato da $\binom{10}{3}$. Riassumendo

$$|A| = \binom{10}{2}\binom{10}{3}$$

con $A$="su 5 estrazioni che faccio, estraggo 2 palline rosse"'. La probabilità cercata è quindi:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{3}}{\binom{20}{5}} = 0.35$$

**Esercizio 1,6 September 2011** Suppose to choose at random 4 balls from a box containing 5 black balls, 8 red balls and 2 white balls (sampling without replacement). What is the probability that the 2 white balls are in the sample?

RISOLUZIONE: Esercizio analogo al precedente, fatelo voi e se ci sono problemi lo confrontiamo. Il risultato dovrebbe essere 0.057.

**Esercizio 3,2 September 2010** A box contains 40 balls: 20 are green, 10 are red and 10 are yellow. Two balls, drawn at random and without replacement, happen to be of the same colour. What is the probability that they are red?

RISOLUZIONE: Ci chiede la probabilità di estrarre due palle rosse su quattro, in un totale di 40 palle. Molto simile a quelli precedenti. La soluzione è:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = 0.057$$