Disequazioni Irrazionali

L'obiettivo è risolvere disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \leq \ (\geq) B(x)$ con $A(x)$ e $B(x)$ due funzioni qualunque. Studiamo i due casi separatamente, perchè la risoluzione è diversa a seconda del segno della disequazione

Caso: $\sqrt{A(x)} \leq \ B(x)$

In questo caso ci stiamo chiedendo quando la radice quadrata di una funzione è minore od uguale ad un altra funzione. Per le condizioni di esistenza, notiamo che la funzione $A(x)$ non deve essere negativa: non esiste la radice di un numero negativo, perchè, per esempio $\sqrt{-2} = a \leftrightarrow a^2 = -2$ e sappiamo che la seconda equazione è impossibile, poichè nessun numero elevato alla seconda può essere negativo. Quindi affinchè l'espressione scritta sopra abbia senso, dobbiamo porre $A(x) \geq 0$.

Per definizione di radice quadrata, la radice quadrata di un numero positivo è un numero positivo. Dunque il termine a sinistra è sicuramente positivo. Poichè il termine a destra deve essere maggiore od uguale di quello a sinistra, ne segue che anche lui deve essere positivo. Un'altra condizione da porre è dunque : $B(x) \geq 0$.

Ora possiamo risolvere la disequazione provando per esempio ad elevare entrambi i membri al quadrato, come nel caso delle equazioni irrazionali. Otterremo dunque $A(x) \leq (B(x))^2$, che, nei casi migliori, sarà un disequazione di primo o secondo grado, che siamo in grado di risolvere.

Riassumendo, **se dobbiamo risolvere disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \leq \ B(x)$, bisogna provare a risolvere il seguente sistema**

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq (B(x))^2 \end{cases} \tag{1}$$

Caso: $\sqrt{A(x)} \geq \ B(x)$

In questo caso, la prima parte della discussione rimane la stessa, ovvero la radice quadrata deve avere come argomento un numero positivo, ovvero $A(x) \geq 0$.

Quello che cambia è che, se il termine a destra dovesse essere negativo, questa volta la disequazione sarà sicuramente soddisfatta, in quanto a sinistra avremmo un termine positivo (la radice quadrata di un numero positivo) che è sempre maggiore di un numero negativo.

Dunque, un sistema che risolve la disequazione è il seguente:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se invece il termine a destra fosse positivo, allora in questo caso si potrebbe risolvere la disequazione, come nel caso precedente, elevando entrambi i membri al quadrato, ottenendo analogamente al caso precedente, $A(x) \geq (B(x))^2$.

Dunque, in questo caso, il sistema da risolvere sarebbe:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq (B(x))^2 \end{cases} \tag{3}$$

Riassumendo, **se dobbiamo risolvere disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$, le soluzioni saranno date dall'insieme delle soluzioni dei sistemi (2) e (3)**

Cosa dobbiamo fare invece nel caso di disequazioni del tipo $\sqrt[3]{A(x)} \geq (\leq) B(x)$?

In questo caso non bisogna porre delle condizioni di esistenza, in quanto la radice terza di un numero negativo esiste ed è un numero negativa ($\sqrt[3]{-27} = -1$).

Quindi basta provare ad elevare entrambi i membri della disequazione alla terza, e cercare di risolvere la disequazione (che sarà un polinomio) che otteniamo. Se viene fuori un polinomio di primo o di secondo grado, la soluzione si trova facilmente.

Se viene fuori un polinomio di grado superiore a due, bisogna cercare di scomporlo tramite Ruffini o divisione polinomiale, e quindi poi procedere allo studio del segno.

Riassumendo, **se dobbiamo risolvere disequazioni del tipo** $\sqrt[3]{A(x)} \geq (\leq) B(x)$ bisogna provare a risolvere la seguente disequazione:

$$A(x) \geq (\leq)(B(x))^3$$