Capitolo 1

Equazioni trigonometriche

1.1 Classificazione e risoluzione

Un piccolo riassunto intanto sulle funzioni trigonometriche:

$$\sin x, \cos x \;\; \text{Dominio} : \mathbb{R}; \;\; \text{Codominio} : [-1, 1]$$

$$\tan x \;\; \text{Dominio} : \mathbb{R}/(\frac{\pi}{2} + k\pi); \;\; \text{Codominio} : \mathbb{R}$$

$$\cot x \;\; \text{Dominio} : \mathbb{R}/(\pi + k\pi); \;\; \text{Codominio} : \mathbb{R}$$

Equazioni elementari

Sono le equazioni in cui compare solo una funzione trigonometrica. Si risolvono tramite la circonferenza trigonometrica.

Esempio 1

$$2 \sin x = \sqrt{3} \leftrightarrow$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Esempio 2

$$\cot x \sin x = 1 \leftrightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} \sin x = 1 \text{ se} x \neq k\pi \leftrightarrow$$

$$\cos x = 1 \leftrightarrow$$

$$x = 2\pi + 2k\pi$$

Soluzione non accettabile viste le condizioni di esistenza.

Equazioni lineari di primo grado in seno e coseno

Sono equazioni del tipo $\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma = 0$

Se $\gamma = 0$, allora si divide per $\cos x$ (ponendo le condizioni di esistenza) e si torna a un equazione elementare in $\tan x$.

Se $\gamma \neq 0$, allora vi sono due metodi di risoluzione: uso delle formule parametriche o il sistema con la circonferenza trigonometrica.

- formule parametriche:
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$
Si risolve effettuando queste sostituzioni all' equazione, ottenendo un equazione in t. Poi, trovate le soluzioni si pongono uguali a $\tan\frac{x}{2}$, ovvero si risolve un equazione elementare

- Sistema
Si risolve il seguente sistema, ponendo $\cos x = X$, $\sin x = Y$
$$\begin{cases} \alpha Y + \beta X + \gamma = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$
Dalla prima equazione si esplicita una delle due variabili (quella con il coefficiente più basso solitamente) e la si sostituisce sulla seconda; si risolve l'equazione di secondo grado trovando 2 (0,1) soluzioni. Ci si riconduce poi alle variabili originali $(\sin x, \cos x)$.

Di solito non vi è un metodo migliore dell'altro; con le formule parametriche bisogna stare attenti alle condizioni di esistenza, con il sistema in genere è un po' più lineare ma vi sono più conti da fare

Esempio: uso parametriche

$$\sin x + \cos x - 1 = 0$$

Sostituendo le formule parametriche:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$
$$\frac{2t + 1 - t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} = 0$$

Poichè una frazione fa 0 quando il numeratore è uguale a 0, possiamo eliminare il denominatore:

$$2t - 2t^2 = 0 \leftrightarrow$$
$$t(1-t) = 0 \leftrightarrow t_1 = 0 \; t_2 = 1$$

Sostituendo alla variabile originale abbiamo che:

$$\tan\frac{x}{2} = 0 \to \frac{x}{2} = k\pi \to x = 2k\pi$$
$$\tan\frac{x}{2} = 1 \to \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Usiamo la stessa equazione con il metodo del sistema

Esempio: uso sistema

$$\sin x + \cos x - 1 = 0$$
$$\begin{cases} X + Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Sostutiamo $X = 1 - Y$ nell'equazione della circonferenza

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ (1 - Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Risolviamo il sistema di secondo grado

$$(1 - Y)^2 + Y^2 = 1 \leftrightarrow 2Y^2 - 2Y = 0 \leftrightarrow$$
$$Y(Y - 1) = 0$$

Dunque se $Y = 0$, sostituendo nel sistema (1) otteniamo

$$\begin{cases} Y = 0 \\ X = 1 \end{cases}$$

che restituisce la soluzione (risostituendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$) $x = 2k\pi$.

Se $Y = 1$ otteniamo:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Equazioni di secondo grado in seno e coseno

Sono del tipo $\alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x + \gamma \sin x \cos x + \delta = 0$ Anche in questo caso il metodo di risoluzione cambia se il termine noto è nullo o no

Se $\delta = 0$, si divide tutto per $\cos^2 x$, ottenendo un equazione di secondo grado in $\tan x$ risolvibile con i soliti metodi di risoluzione;

Se $\delta \neq 0$ si moltiplica δ per $\cos^2 x + \sin^2 x$ (che essendo uguale a uno non cambia l'equazione) e di ottiene la seguente equazione

$$(\alpha + \delta) \sin^2 x + (\beta + \delta) \cos^2 x + \gamma \sin x \cos x = 0$$

che è un equazione senza termine noto e si risolve come scritto sopra.

Esercizio

$$2\sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ otteniamo:

$$\sqrt{3} \tan^2 x - \tan x = 0$$

L'equazione di secondo grado, sostituendo $\tan x = T$ ha soluzione $T = 0$ o $T = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ne segue che:

$$\tan x = 0 \to x = k\pi$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \to x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$