0.1 Esercizi calcolo combinatorio

1) Sappiamo che il numero delle combinazioni di n oggetti presi 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni di n oggetti presi 3 a 3. Trovare n.

Svolgimento

Bisogna solo applicare la definizione di combinazione: il numero delle combinazioni di n oggetti presi 4 a 4 è dato da $\binom{n}{4}$. Analogamente per gli oggetti presi 3 a 3. Bisogna dunque risolvere

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$$

Svolgendo i conti, ricordandosi della definizione di binomiale

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

Semplificando $n!$, sapendo che $3! = 6,\ 4! = 24$ abbiamo

$$\frac{(n-3)!}{(n-4)!} = \frac{24}{6}$$

$$n - 3 = 4 \leftrightarrow n = 7$$

2) Sia $n \geq 4$ e si sa che $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica. Trovare il valore di n.

Svolgimento: a, b, c si dicono in progressione aritmetica se $b - a = c - b$. Dobbiamo dunque risolvere l'equazione

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}$$

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-3}$$

$$2\frac{n!}{2(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{6(n-3)!}$$

Facciamo denominatore comune (semplificando $n!$)

$$\frac{6(n-1) - 6 - (n-1)(n-2)}{6(n-1)!} = 0$$

Al numeratore troviamo

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \leftrightarrow n = 7$$

3) Dimostrare l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$

Svolgimento Dobbiamo dimostrare

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{(n-k)!k!(k+1)!}$$

Possiamo semplificare $n!$, inoltre $(k+1)*k! = (k+1)!$ dunque possiamo semplificarli. Inoltre $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$. Dunque l'identità è banalmente verificata.

4) Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ sono in progressione aritmetica, quale è il valore di n?
Svolgimento.

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$$

$$2\frac{n!}{2(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{(n!}{6(n-3)!} = 0$$

Semplicando e uguagliando il numeratore a 0 otteniamo

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \rightarrow n = 7$$

Osservazione 1. In realtà vale che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (perchè?) dunque l'esercizio era identico all'esercizio 2.

5) Esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?
Svolgimento. Segue dall'osservazione precedente

$$\binom{12}{k} = \binom{12}{12-k}$$

Dunque devo trovare k tale che

$$\binom{12}{12-k} = \binom{12}{k-3} \leftrightarrow 12 - k = k - 3 \rightarrow k = \frac{7}{2}$$

Dunque, poichè k deve essere naturale, ne segue che non è accettabile.