Esercizio

La tangente alla curva $f(x) = \frac{3\tan x}{1+\sin x}$ nel suo punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{6}$ taglia l'asse x nel punto T. Trovare la distanza di T dall'origine.

Svolgimento

L'equazione che dobbiamo utilizzare è quella della retta tangente ad una curva, ovvero:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Abbiamo $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{(\cos x)^2}(1+\sin x) - 3\cos x \frac{\sin x}{\cos x}}{(1+\sin x)^2} \tag{2}$$

Calcoliamola in $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$f'(\frac{\pi}{6}) = 2$

Dunque sostituendo nella formula della tangente otteniamo:

$$y - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2(x - \frac{\pi}{6}) \tag{3}$$

La tangente taglia l'asse x in T. In altre parole la tangente passa per $(T, 0)$. Sostituiamo questo punto di passaggio alla tangente e cerchiamo di determinare il valore di T.

$$0 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2(T - \frac{\pi}{6}) \rightarrow$$

$$T = \frac{\pi - 2\sqrt{3}}{6}$$

Abbiamo trovato il valore di T. Notiamo che è negativo, dunque il punto sta sull'asse x a sinistra. Per avere la distanza del punto dall'origine basta prendere il modulo del numero trovato (basta fare un disegno ed è evidente). Dunque la soluzione è esattamente $-T$.