I Esame di maturità 2012

Quesito 1

Cosa rappresenta?

$$\lim_{h\to 0} \frac{5(\frac{1}{2}+h)^4 - 5\frac{1}{2}^4}{h}$$

Portando fuori il 5 abbiamo

$$5\lim_{h\to 0} \frac{(\frac{1}{2}+h)^4 - \frac{1}{2}^4}{h}$$

che assomiglia ad un rapporto incrementale del tipo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

e in effetti ponendo $f(x) = x^4$ abbiamo che il limite cercato coincide con $5f'(\frac{1}{2})$. Poichè, se $f(x) = x^4 \to f'(x) = 4x^3 \to f'(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3$ abbiamo che il limite cercato è 5 volte il rapporto incrementale della funzione $f(x) = x^4$ calcolato in $x = \frac{1}{2}$ e vale

$$5f'(\frac{1}{2}) = 20\frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

Quesito 2 L'asintoto è in generale rappresentato da una retta alla quale la nostra funzione si avvicina sempre di piè senza mai toccarlo. Ci sono tre tipi di asintoti

1) Asintoto orizzontale è dato da

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

Allora la retta $y = l$ è asintoto orizzontale (e la funzione, a più infinito, ci tende senza mai toccarla).

2) Asintoto verticale se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

Allora la retta $x = c$ è asintoto verticale e la funzione tende ad infinito in prossimità di questa retta

3) Asintoto obliquo

$$y = mx + q\text{con} \quad m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

Dunque la funzione va a infinito, ma come la retta $y = mx + q$.

L'esercizio chiede di determinare una funzione che abbia un asintoto orizzontale e due asintoti verticali. L'asintoto orizzontale lo abbiamo per esempio nelle funzioni razionali, se il grado del numeratore coincide con il grado del denominatore; l'asintoto verticale lo abbiamo per esempio se si annulla in denominatore e dunque abbiamo una forma del tipo $\frac{a}{0} \to \infty$.

Un esempio della funzione cercata è:

$$f(x)\frac{x^2}{(x-3)(x-5)} \quad \text{oppure} f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)}$$

Quesito 3

$$S(t) = 20(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2)$$

Trovare l'accelerazione in $t = 4$.

Bisogna solo ricordarsi che l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio (mentre la velocità coincide con la derivata prima). Dunque

$$V(t) = S'(t) = 20(2(e^{-\frac{t}{2}})(-\frac{1}{2}) + 1) = 20(-e^{-\frac{t}{2}} + 20)$$

$$A(t) = V'(t) = 20(-e^{-\frac{t}{2}})(-\frac{1}{2}) = 10e^{-\frac{t}{2}}$$

Calcolata in $t = 4$ abbiamo

$$A(4) = 10e^{-\frac{4}{2}} = 10e^{-2}$$

Quesito 4 Capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro. Devo calcolare il volume del cono e massimizzare questa funzione.

$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

So che il legame tra apotema, raggio e altezza è dato da $h^2 = a^2 - r^2$ dunque, poichè l'apotema vale 1 abbiamo che:

$$h^2 = 1 - r^2 \to h = \sqrt{1 - r^2}$$

Sostituendo nella formula del volume abbiamo

$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 \sqrt{1 - r^2}}{3}$$

Questa è una funzione in r da massimizzare. Definiamo dunque la funzione

$$f(r) = \frac{\pi r^2 \sqrt{1 - r^2}}{3}$$

Calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno

$$f'(r) = \frac{\pi}{3}(2r\sqrt{1 - r^2} + r^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2}}(-2r))$$

Facendo denominatore comune abbiamo

$$f'(r) = \frac{\pi}{3} \frac{4r(1 - r^2) - 2r^3}{2\sqrt{1 - r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{2r(-3r^2 + 2)}{2\sqrt{1 - r^2}}$$

Dobbiamo studiare il segno.

$$N_1 \geq 0 \leftrightarrow 2r \geq 0 \leftrightarrow r > 0$$

$$N_2 \geq 0 \leftrightarrow -3r^2 + 2 \geq 0 \leftrightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} < r < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$D > 0 \ \forall r \in (-1, 1)$$

Studiando il segno di questa cosa, abbiamo che

$$f'(r) > 0 \quad r < -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{e } 0 < r < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

In questi intervalli la derivata è positiva e dunque la funzione è crescente. In particolare per $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ abbiamo un punto di massimo. Ora per capire la capacità massima, dobbiamo sostituire questo valore al volume

$$V_{max} = Vol_{cono}(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{\pi \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}{3} =$$

$$V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Quesito 5 Da come lo interpreto io, è un esercizio di calcolo combinatorio. Dati n punti, quante solo le possibili coppie? Sono

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Quante solo le possibili terne? Sono

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Quanti sono le possibili quaterne? Sono

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Quesito 6

$$f(x) = 5\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) - \frac{5}{2}\sin(2x) - \cos(2x) - 17$$

Per fare la derivata ci sono due metodi

1) Metodo dell'ingegnere: Fare brutalemente i conti

$$f'(x) = 5\cos(x)\cos(x) - 5\sin(x)\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \frac{5}{2}\cos(2x)(2) + 2\sin(2x)$$

Semplificando fa

$$5(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)$$

2) Metodo Matematico

Notiamo che

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

e che
$$\frac{5}{2}\sin(2x) = \frac{5}{2}2\sin(x)\cos(x) = 5\sin(x)\cos(x)$$
Sostituendo alla funzione abbiamo
$$f(x) = 5\sin(x)\cos(x) + \cos(2x) - 5\sin(x)\cos(x) - \cos(2x) - 17 = 17$$
Dunque la funzione è identicamente 17 ovvero $f(x) = 17$ da cui
$$f'(x) = 0$$

Quesito 8 Esercizio del valor medio.
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \in [1, e]$$
Vale dunque che il valor medio è dato da:
$$f(c) = \frac{\int_1^e \frac{1}{x}dx}{e-1}$$
Abbiamo che:
$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = (\ln(x))_{x=1}^{x=e} = \ln(e) - \ln(1) = 1$$
Dunque
$$f(c) = \frac{1}{e-1}$$

Quesito 9 Prendiamo nel piano cartesiano due punti A e B fissati, dunque per esempio
$$A = (x_a, y_a), \quad B = (x_b, y_b)$$
Prendiamo una retta $y = mx + q$ generica. Tutti i punti di questa retta hanno coordinate $P = (x, mx + q)$. Dobbiamo minimizzare la somma delle distanze tra AP e PB. Abbiamo dunque
$$AP = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - mx - q)^2}$$
$$PB = \sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - mx - q)^2}$$
e dunque la funzione da minimizzare diventa
$$AP + PB = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - mx - q)^2} + \sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - mx - q)^2}$$
Bisogna fare la derivata rispetto a x di questa funzione e porla ≥ 0. I conti sono lunghissimi e parametrici (perchè dipendono da A,B,m,q), ma questo era il procedimento (e secondo me la soluzione) da scrivere.

Quesito 10

Partiamo dalla prima funzione
$$\cos(\sin(x^2+1)) \geq 0 \leftrightarrow -\frac{pi}{2} < \sin(x^2+1) < \frac{\pi}{2}$$
per le proprietà del coseno (il coseno è positivo se l'argomento sta tra $-\frac{\pi}{2}$e $\frac{\pi}{2}$). ora, $\frac{pi}{2} = 1.55 > 1$. Dunque la funzione è positiva quando
$$-1.55 < \sin(x^2+1) < 1.55$$

Ma questo è sempre vero, perchè il seno di un qualunque angolo è sempre compreso tra $[-1, 1]$. Dunque la funzione giusta è la prima.

Problema 1

$$f(x) = |27x^3| \qquad g(x) = \sin(\frac{3}{2}\pi x)$$

Il periodo di una funzione del tipo $\sin(kx)$ è $\frac{2\pi}{k}$ Dunque il periodo di $g(x)$ è $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$. Il punto A è un classico studio di funzione. Partiamo fa $f(x)$. 1) Dominio: $\mathbb{R}$

2) Segno $f(x) \geq 0\ \forall x in \mathbb{R}$.

3) Intersezione con gli assi, solo l'origine $(0, 0)$

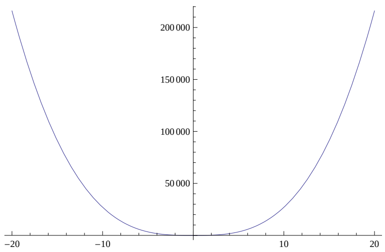
4) Limiti

$$lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

5) Derivata

$$f'(x) = 81x^2 \text{se} x > 0\ , -81x^2 \text{se} x < 0$$

In particolar modo $x = 0$ è punto angoloso della funzione. Questo il suo grafico.



Passiamo a

$$g(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$$

Abbiamo detto che è periodica di periodo $\frac{4}{3}$.

1)Dominio: $\mathbb{R}$

2)Segno:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}x) > 0 \to 0 < \frac{3\pi}{2}x < \pi$$

Moltiplicando per $\frac{3\pi}{2}$ i tre membri si ha

$$\sin(\frac{3\pi}{2}x) > 0 \to 0 < x < \frac{2}{3}$$

3) Intersezione con gli assi

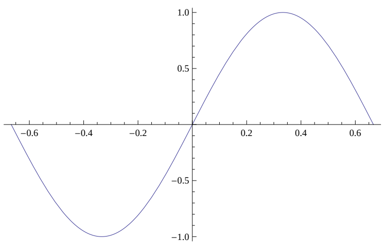
$$x = 0 \to \sin(\frac{3\pi}{2}0) = \sin(0) = 0$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2}x) = 0 \to \frac{3\pi}{2}x = 0 \text{ oppure } \frac{3\pi}{2}x = \pi$$

che da come soluzione $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. I punti di passaggio sono dunque.

$$A = (\frac{2}{3}, 0), O = (0, 0)$$

4) Derivata
$$g'(x) = \frac{3\pi}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}x)$$
dunque
$$g'(x) \geq 0 \to \cos(\frac{3\pi}{2}x) \geq 0$$
che da come soluzione
$$\frac{pi}{2} < \frac{3\pi}{2}x) < \frac{\pi}{2}$$
e dunque esplicitando la x
$$g'(x) \geq 0 \to -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$
Dunque abbiamo un minimo in $x = -\frac{1}{3}$ e un massimo in $x = \frac{1}{3}$. Questo è il grafico della funzione



punto 2 Bisogna calcolare le equazioni delle rette tangenti in $x = \frac{1}{3}$. La formula, per $f(x)$ è
$$y - f(\frac{1}{3}) = f'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$$
Abbiamo che:
$$f(\frac{1}{3}) = \frac{27}{27} = 1$$
$$f'(\frac{1}{3}) = \frac{81}{9} = 9$$
Dunque
$$r := y - 1 = 9(x - \frac{1}{3}) \to y = 9x - 2$$
Analogamente per $g(x)$
$$y - g(\frac{1}{3}) = g'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$$
Abbiamo che
$$g(\frac{1}{3}) = \sin(\frac{3\pi}{2}\frac{1}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$
$$g'(\frac{1}{3}) = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
Dunque
$$s := y - 1 = 0 \to y = 1$$

La formula per trovare l'angolo tra due rette è la seguente

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 - m_2 m_1}$$

Nel nostro caso m_1=0 dunque $\tan(\theta) = 9$ e l'angolo è

$$\theta = \arctan 9$$

Per calcolare l'area R, basta vedere che la funzione $f(x)$ sta sempre sotto la $g(x)$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$. Dunque

$$R = \int_0^{\frac{1}{3}} g(x) - f(x) dx =$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{3}} \sin(\frac{3\pi}{2}x) dx - \int_0^{\frac{1}{3}} 27x^3 dx$$

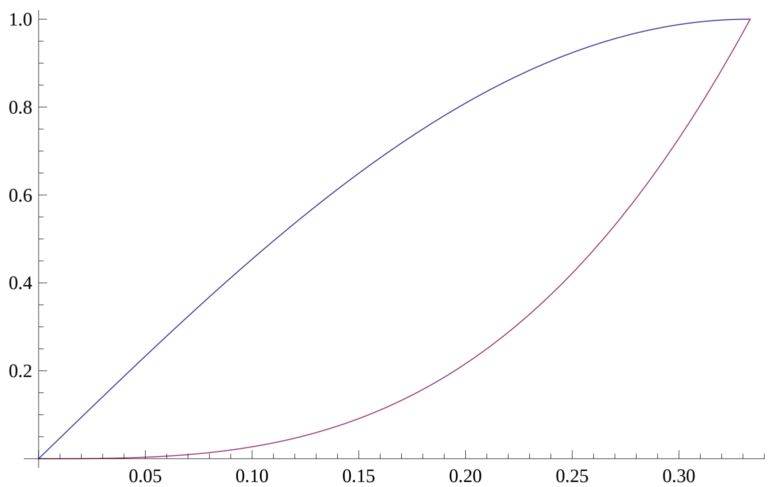
$$= + \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3\pi}{2} \sin(\frac{3pi}{2}x) dx - \frac{27x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{3}}$$

Ora l'integrale è facile da calcolare e vale

$$-\frac{2}{3\pi} \cos(\frac{3\pi}{2}x)_{x=0}^{x=\frac{1}{3}} - \frac{27\frac{1}{3^4}}{4} =$$

$$= -\frac{2}{3\pi}(\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0)) = \frac{1}{12} + 1 = \frac{1}{12} - \frac{2}{3\pi}$$

Questo è il grafico delle due figure (la viola è la $f(x)$.



Ci chiedono ora i volumi di solidi di rotazione. Per quanto riguarda l'asse x basta solo applicare la formula

$$S = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (g(x) - f(x))^2 dx$$

Invece per l'asse y, dobbiamo trovare le funzioni inverse (per $y > 0$, dunque il modulo lo possiamo togliere) Si ha che

$$f(x) = 27x^3 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$$

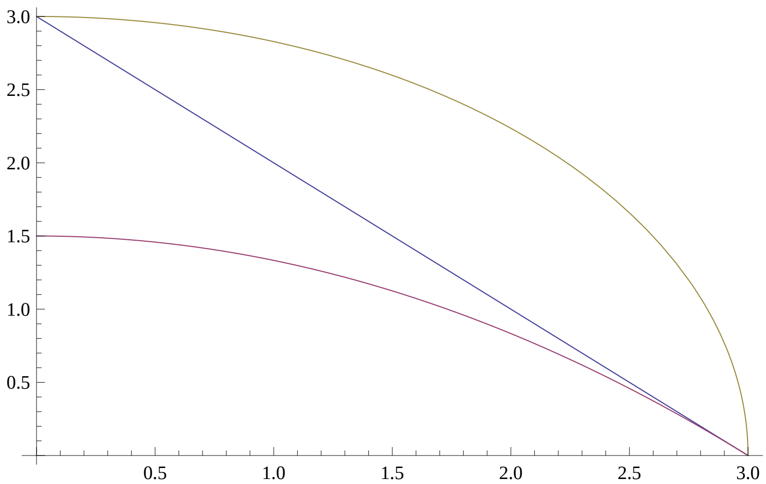
$$g(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x) \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2}{3\pi}\arcsin x$$

Per capire gli estremi di integrazione, bisogna capire l'altezza delle funzioni dei punto $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$. In $x = 0$ le funzioni valgono 0, in $x = \frac{1}{3}$, per esempio $f(\frac{1}{3}) = g(\frac{1}{3}) = 1$. Dunque l'integrale cercato è

$$T = \int_0^1 (\frac{\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{2}{3\pi}\arcsin x)^2 dx$$

.

Problema 2 La parabola si può riscrivere come



$$x^2 = 9 - 6y \rightarrow y = \frac{-x^2+9}{6}$$

La retta r è la retta tangente alla parabola nel punto $A = (3, 0)$. La sua equazione sarà dunque

$$y - 0 = m(x - 3)$$

con m=derivata della funzione calcolata nel punto. Definita $f(x) = \frac{-x^2+9}{6}$ si ha

$$f'(x) = \frac{-x}{3}$$

e dunque

$$f'(3) = -1$$

La retta r è dunque

$$r := y = -x + 3$$

Per trovare l'area tra la retta e la circonferenza si procede così. L'area del semicerchio di raggio 3 è data da

$$A_{circ} = \frac{\pi 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

L'area del triangolo OAB è data da

$$A_{trian} = \frac{3*3}{2} = \frac{9}{2}$$

Dunque l'area racciusa tra la retta e la circonferenza è data da:

$$A = A_{circ} - A_{trian} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

Per trovare l'area tra la retta e la parabola, dobbiamo prima calcolare l'area della parabola tra 0 e 3. Per far questo basta calcolare l'integrale

$$A_{parab} = \int_0^3 \frac{-x^2+9}{6}dx = (\frac{\frac{-x^3}{3}+9x}{6})_{x=0}^{x=3} = 3$$

L'area cercata vale dunque

$$A_{trian} - A_{parab} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Per il punto due, se le sezioni hanno Area $S(x) = e^{5-3x}$, per trovare il volume bisogna integrale le sezioni lungo tutta la lunghezza dove sono definite. Ne segue che

$$V = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x}dx = \frac{-1}{3}\int_0^3 (-3)e^{5-3x}dx =$$

$$= (\frac{-1}{3}e^{5-3x})_{x=0}^{x=3} = \frac{-1}{3}(e^{-4} - e^5) = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}$$

Per il punto 3), si tratta del volume di solido di rotazione. L'arco di circonferenza ha equazione

$$y = \sqrt{9-x^2}$$

dunque

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{9-x^2} - \frac{9-x^2}{6})dx$$