Un modello di programmazione stocastica per l'emissione ottimale dei titoli di Stato

Francesco Castelli

Università di Padova

3 Ottobre 2011

Piano della presentazione

Introduzione

- I titoli di Stato sono obbligazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per ottenere liquidità necessaria per pagare, per esempio, pensione e stipendi.
- In Italia i più importanti titoli sono i BOT che possono durare dai 3 ai 12 mesi e i BTP che durano da 2 a 30 anni.
- I tassi di interesse dipendono per esempio dalle decisioni della BCE e dal rating dell'emittente: maggiore è il rischio di *default* (insolvenza) di uno Stato, maggiori devono essere i tassi di interesse che deve offrire per riuscire a vendere i suoi titoli

Obiettivo del modello

Decidere l'emissione ottimale dei titoli di Stato in maniera da minimizzare il costo ad un certo tempo finale, cercando di limitare il rischio e supponendo che i tassi di interesse si evolvano in maniera aleatoria

Introduzione

- I titoli di Stato sono obbigazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per ottenere liquidità necessaria per pagare, per esempio, pensione e stipendi.
- In Italia i più importanti titoli sono i BOT che possono durare dai 3 ai 12 mesi e i BTP che durano da 2 a 30 anni.
- I tassi di interesse dipendono per esempio dalle decisioni della BCE e dal rating dell'emittente: maggiore è il rischio di *default* (insolvenza) di uno Stato, maggiori devono essere i tassi di interesse che deve offrire per riuscire a vendere i suoi titoli

Obiettivo del modello

Decidere l'emissione ottimale dei titoli di Stato in maniera da minimizzare il costo ad un certo tempo finale, cercando di limitare il rischio e supponendo che i tassi di interesse si evolvano in maniera aleatoria.

Introduzione

- I titoli di Stato sono obbligazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per ottenere liquidità necessaria per pagare, per esempio, pensione e stipendi.
- In Italia i più importanti titoli sono i BOT che possono durare dai 3 ai 12 mesi e i BTP che durano da 2 a 30 anni.
- I tassi di interesse dipendono per esempio dalle decisioni della BCE e dal rating dell'emittente: maggiore è il rischio di *default* (insolvenza) di uno Stato, maggiori devono essere i tassi di interesse che deve offrire per riuscire a vendere i suoi titoli

Obiettivo del modello

Decidere l'emissione ottimale dei titoli di Stato in maniera da minimizzare il costo ad un certo tempo finale, cercando di limitare il rischio e supponendo che i tassi di interesse si evolvano in maniera aleatoria.

Introduzione

- I titoli di Stato sono obbligazioni emesse periodicamente dal Ministero del Tesoro per ottenere liquidità necessaria per pagare, per esempio, pensione e stipendi.
- In Italia i più importanti titoli sono i BOT che possono durare dai 3 ai 12 mesi e i BTP che durano da 2 a 30 anni.
- I tassi di interesse dipendono per esempio dalle decisioni della BCE e dal rating dell'emittente: maggiore è il rischio di *default* (insolvenza) di uno Stato, maggiori devono essere i tassi di interesse che deve offrire per riuscire a vendere i suoi titoli

Obiettivo del modello

Decidere l'emissione ottimale dei titoli di Stato in maniera da minimizzare il costo ad un certo tempo finale, cercando di limitare il rischio e supponendo che i tassi di interesse si evolvano in maniera aleatoria.

- Spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
  Insieme dei tempi:
  $I = \{\{0, t_1, \cdots, t_H\} \,|\, t_i = t_{i-1} + K,\ i \leq H,\ K > 0\}$.
  $\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$ variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$
- Modelliamo questo spazio di probabilità con uno scenario ad albero non necessariamente ricombinante : al tempo 0 abbiamo il nodo *radice* $\mathcal{N}_0$.
  ogni nodo n al tempo t_i avrà un unico padre $\alpha(n) \in \mathcal{N}_{t_{i-1}}$ e un numero generico di figlio $c(n) \in \mathcal{N}_{t_{i+1}}$.
  Filtrazione $\mathcal{F}_{t_i}$ adattata alla partizione dei nodi $\mathcal{N}_{t_i}$.
- Probabilità ottenuta assegnando dei pesi $p_n > 0$ ai nodi finali tali che $\sum_{n \in \mathcal{N}_{t_H}} p_n = 1$ e ricorsivamente:

$$p_n = \sum_{m \in c(n)} p_m$$

- Spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
  Insieme dei tempi:
  $I = \{\{0, t_1, \cdots, t_H\} \,|\, t_i = t_{i-1} + K,\ i \leq H,\ K > 0\}$.
  $\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$ variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$
- Modelliamo questo spazio di probabilità con uno scenario ad albero non necessariamente ricombinante : al tempo 0 abbiamo il nodo *radice* $\mathcal{N}_0$.
  ogni nodo n al tempo t_i avrà un unico padre $\alpha(n) \in \mathcal{N}_{t_{i-1}}$ e un numero generico di figlio $c(n) \in \mathcal{N}_{t_{i+1}}$.
  Filtrazione $\mathcal{F}_{t_i}$ adattata alla partizione dei nodi $\mathcal{N}_{t_i}$.
- Probabilità ottenuta assegnando dei pesi $p_n > 0$ ai nodi finali tali che $\sum_{n \in \mathcal{N}_{t_H}} p_n = 1$ e ricorsivamente:

$$p_n = \sum_{m \in c(n)} p_m$$

- Spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Insieme dei tempi:
$I = \{\{0, t_1, \cdots, t_H\} \,|\, t_i = t_{i-1} + K,\ i \leq H,\ K > 0\}$.
$\{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$ variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$
- Modelliamo questo spazio di probabilità con uno scenario ad albero non necessariamente ricombinante : al tempo 0 abbiamo il nodo *radice* $\mathcal{N}_0$.
ogni nodo n al tempo t_i avrà un unico padre $\alpha(n) \in \mathcal{N}_{t_{i-1}}$ e un numero generico di figlio $c(n) \in \mathcal{N}_{t_{i+1}}$.
Filtrazione $\mathcal{F}_{t_i}$ adattata alla partizione dei nodi $\mathcal{N}_{t_i}$.
- Probabilità ottenuta assegnando dei pesi $p_n > 0$ ai nodi finali tali che $\sum_{n \in \mathcal{N}_{t_H}} p_n = 1$ e ricorsivamente:

$$p_n = \sum_{m \in c(n)} p_m$$

Nel nostro modello, ipotizziamo che i tassi di interesse *short* abbiano la seguente dinamica con $r_{t_0} = r_0$:

$$r_{t_{i+1}} = \begin{cases} r_{t_i} + \sigma\sqrt{K} \text{ con probabilità } q_{t_i} \\ r_{t_i} - \sigma\sqrt{K} \text{ con probabilità } 1 - q_{t_i} \end{cases}$$

dove $\sigma > 0$ è un parametro arbitrario e q_{t_i} è la probabilità che i tassi salgano in t_i, probabilità fatta rispetto alla misura martingala Q che dipende dallo stato in cui siamo e che andremo a determinare.

- Definendo il *fattore di sconto* $D(t_n, t_N) = \sum_{i=n}^{N-1} \exp(-Kr_{t_i})$ e con $p(t_h, t_k)$ il prezzo di un T-bond che in t_h ci garantisce un unità monetaria in t_k, si ha:

Teorema

$$p(t_h, t_k) = E^Q[D(t_h, t_k)|\mathcal{F}_{t_h}]$$

- ponendo $h = 0, k = 2$ si ha che:

$$p(0, t_2) = E^Q[\exp(-K(r_0 + r_{t_1}))] =$$

$$\exp(-2Kr_0)(\exp(-K\sigma\sqrt{K})q_{t_1} + \exp(K\sigma\sqrt{K})(1 - q_{t_1}))$$

Esplicitando q_{t_1} si ha:

$$q_{t_1} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2)\exp(2Kr_0))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1}$$

- Definendo il *fattore di sconto* $D(t_n, t_N) = \sum_{i=n}^{N-1} \exp(-Kr_{t_i})$ e con $p(t_h, t_k)$ il prezzo di un T-bond che in t_h ci garantisce un unità monetaria in t_k, si ha:

Teorema

$$p(t_h, t_k) = E^Q[D(t_h, t_k)|\mathcal{F}_{t_h}]$$

- ponendo $h = 0, k = 2$ si ha che:

$$p(0, t_2) = E^Q[\exp(-K(r_0 + r_{t_1}))] =$$

$$\exp(-2Kr_0)(\exp(-K\sigma\sqrt{K})q_{t_1} + \exp(K\sigma\sqrt{K})(1 - q_{t_1}))$$

Esplicitando q_{t_1} si ha:

$$q_{t_1} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2)\exp(2Kr_0))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1}$$

- Definendo il *fattore di sconto* $D(t_n, t_N) = \sum_{i=n}^{N-1} \exp(-Kr_{t_i})$ e con $p(t_h, t_k)$ il prezzo di un T-bond che in t_h ci garantisce un unità monetaria in t_k, si ha:

Teorema

$$p(t_h, t_k) = E^Q[D(t_h, t_k)|\mathcal{F}_{t_h}]$$

- ponendo $h = 0, k = 2$ si ha che:

$$p(0, t_2) = E^Q[\exp(-K(r_0 + r_{t_1}))] =$$

$$\exp(-2Kr_0)(\exp(-K\sigma\sqrt{K})q_{t_1} + \exp(K\sigma\sqrt{K})(1 - q_{t_1}))$$

Esplicitando q_{t_1} si ha:

$$q_{t_1} = \frac{\exp(K\sigma\sqrt{K})(\exp(K\sigma\sqrt{K}) - p(0, t_2)\exp(2Kr_0))}{\exp(2K\sigma\sqrt{K}) - 1}$$

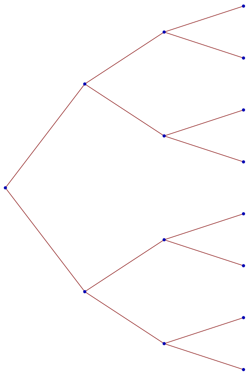

Figura: esempio di albero non ricombinante con la dinamica dei tassi che useremo nel modello

Misure coerenti

- Nella finanza moderna è diventato importante controllare il rischio che può derivare dagli investimenti, per prevenire perdite elevate. Una misura di rischio *coerente* $\rho(z)$ con z che varia tra i possibili investimenti, deve godere di alcune proprietà matematiche:

1. subadditività $\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$
2. omogeneità $\beta\rho(z_1) = \rho(\beta z_1) \quad \beta \in \mathbb{R}$
3. monotonia $\rho(z_1) < \rho(z_2)$ se $z_1 < z_2$
4. invarianza $\rho(z_1 + \beta) = \rho(z_1) - \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

Misure coerenti

- Nella finanza moderna è diventato importante controllare il rischio che può derivare dagli investimenti, per prevenire perdite elevate. Una misura di rischio *coerente* $\rho(z)$ con z che varia tra i possibili investimenti, deve godere di alcune proprietà matematiche:

1. subadditività $\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$
2. omogeneità $\beta\rho(z_1) = \rho(\beta z_1) \quad \beta \in \mathbb{R}$
3. monotonia $\rho(z_1) < \rho(z_2)$ se $z_1 < z_2$
4. invarianza $\rho(z_1 + \beta) = \rho(z_1) - \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

Misure coerenti

- Nella finanza moderna è diventato importante controllare il rischio che può derivare dagli investimenti, per prevenire perdite elevate. Una misura di rischio *coerente* $\rho(z)$ con z che varia tra i possibili investimenti, deve godere di alcune proprietà matematiche:

1. subadditività $\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$
2. omogeneità $\beta\rho(z_1) = \rho(\beta z_1) \quad \beta \in \mathbb{R}$
3. monotonia $\rho(z_1) < \rho(z_2)$ se $z_1 < z_2$
4. invarianza $\rho(z_1 + \beta) = \rho(z_1) - \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

Misure coerenti

- Nella finanza moderna è diventato importante controllare il rischio che può derivare dagli investimenti, per prevenire perdite elevate. Una misura di rischio *coerente* $\rho(z)$ con z che varia tra i possibili investimenti, deve godere di alcune proprietà matematiche:

1. subadditività $\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$
2. omogeneità $\beta\rho(z_1) = \rho(\beta z_1) \quad \beta \in \mathbb{R}$
3. monotonia $\rho(z_1) < \rho(z_2)$ se $z_1 < z_2$
4. invarianza $\rho(z_1 + \beta) = \rho(z_1) - \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

Misure coerenti

- Nella finanza moderna è diventato importante controllare il rischio che può derivare dagli investimenti, per prevenire perdite elevate. Una misura di rischio *coerente* $\rho(z)$ con z che varia tra i possibili investimenti, deve godere di alcune proprietà matematiche:

1. subadditività $\rho(z_1 + z_2) \leq \rho(z_1) + \rho(z_2)$
2. omogeneità $\beta\rho(z_1) = \rho(\beta z_1) \quad \beta \in \mathbb{R}$
3. monotonia $\rho(z_1) < \rho(z_2)$ se $z_1 < z_2$
4. invarianza $\rho(z_1 + \beta) = \rho(z_1) - \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

Preliminari e CVaR

- sia $z = f(x, Y)$ la funzione perdita, con $x \in X$ che rappresenta l'insieme delle possibili decisioni e Y una variabile aleatoria (nel nostro modello $Y = \{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$).
- Definendo la funzione da $X \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$F_\beta(x,t) = t + \frac{1}{1-\beta} E^P \left\{ [f(x,Y) - t]^+ \right\}$$

si ha che una misura di rischio importante in finanza è la seguente:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_\beta(z,t)$$

con $\beta \in (0,1)$ è detto livello di confidenza del CVaR.
- Nel caso discreto, in cui Y può assumere solo valori $y_1, \cdots, y_n$ con probabilità $p_1, \cdots, p_n$ allora:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} t + \frac{1}{1-\beta} \sum_j [f(z, y_j) - t]^+ p_j$$

Preliminari e CVaR

- sia $z = f(x, Y)$ la funzione perdita, con $x \in X$ che rappresenta l'insieme delle possibili decisioni e Y una variabile aleatoria (nel nostro modello $Y = \{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$).
- Definendo la funzione da $X \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$F_\beta(x, t) = t + \frac{1}{1-\beta} E^P \left\{ [f(x, Y) - t]^+ \right\}$$

si ha che una misura di rischio importante in finanza è la seguente:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_\beta(z, t)$$

con $\beta \in (0, 1)$ è detto livello di confidenza del CVaR.

- Nel caso discreto, in cui Y può assumere solo valori $y_1, \cdots, y_n$ con probabilità $p_1, \cdots, p_n$ allora:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} t + \frac{1}{1-\beta} \sum_j [f(z, y_j) - t]^+ p_j$$

Preliminari e CVaR

- sia $z = f(x, Y)$ la funzione perdita, con $x \in X$ che rappresenta l'insieme delle possibili decisioni e Y una variabile aleatoria (nel nostro modello $Y = \{r_{t_i}\}_{t_i \in I}$).
- Definendo la funzione da $X \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$F_\beta(x, t) = t + \frac{1}{1-\beta} E^P \left\{ [f(x, Y) - t]^+ \right\}$$

  si ha che una misura di rischio importante in finanza è la seguente:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} F_\beta(z, t)$$

  con $\beta \in (0, 1)$ è detto livello di confidenza del CVaR.
- Nel caso discreto, in cui Y può assumere solo valori $y_1, \cdots, y_n$ con probabilità $p_1, \cdots, p_n$ allora:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(z) = \min_{t \in \mathbb{R}} t + \frac{1}{1-\beta} \sum_j [f(z, y_j) - t]^+ p_j$$

- La funzione perdita che andremo a limitare con il CVaR è la seguente:

$$z_n = C_n - E^P[C] \quad n \in \mathcal{N}_{t_H}$$

La funzione che decidiamo di minimizzare è il valor medio dei costi finali usando una probabilità uniforme , ovvero:

$$E^P[C] = \frac{\sum_{n \in \mathcal{N}_{t_H}} C_n}{|\mathcal{N}_{t_H}|}$$

Analisi del modello nel caso generale

- Lo Stato al tempo t_0, per coprirsi da un debito precedente quantificato con K_0 può emettere j titoli: BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in $t_2, \cdots, t_j$ che prevedono pagamento di cedola ad ogni istante.
- Vettore delle uscite dello Stato al tempo t_n del j-esimo titolo è: $d^j_{t_n,t_m} = \mathbf{1}_{A(n)}(j)\frac{1}{D(t_n,t_m)} + c^j_{t_m}\mathbf{1}_{B(n)}(j)$
  $A(n) =$ BOT che scadono al tempo t_n;
  $B(n) =$ BTP con pagamento di cedola al tempo t_n;
  $c^j_{t_m} =$ cedola per il BTP emesso alla pari a scadenza in t_m
- Il valore della cedola per un titolo emesso in t_n e a scadenza in t_m è determinato dalla seguente espressione:

$$c_{t_n}(t_m) = \frac{1 - p(t_n, t_m)}{K(\sum_{j=n+1}^{m} p(t_n, t_j))}$$

Analisi del modello nel caso generale

- Lo Stato al tempo t_0, per coprirsi da un debito precedente quantificato con K_0 può emettere j titoli: BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in $t_2, \cdots, t_j$ che prevedono pagamento di cedola ad ogni istante.
- Vettore delle uscite dello Stato al tempo t_n del j-esimo titolo è: $d^j_{t_n,t_m} = \mathbf{1}_{A(n)}(j)\frac{1}{D(t_n,t_m)} + c^j_{t_m}\mathbf{1}_{B(n)}(j)$
  $A(n) =$ BOT che scadono al tempo t_n;
  $B(n) =$ BTP con pagamento di cedola al tempo t_n;
  $c^j_{t_m} =$ cedola per il BTP emesso alla pari a scadenza in t_m
- Il valore della cedola per un titolo emesso in t_n e a scadenza in t_m è determinato dalla seguente espressione:

$$c_{t_n}(t_m) = \frac{1 - p(t_n, t_m)}{K(\sum_{j=n+1}^{m} p(t_n, t_j))}$$

Analisi del modello nel caso generale

- Lo Stato al tempo t_0, per coprirsi da un debito precedente quantificato con K_0 può emettere j titoli: BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in $t_2, \cdots, t_j$ che prevedono pagamento di cedola ad ogni istante.
- Vettore delle uscite dello Stato al tempo t_n del j-esimo titolo è: $d^j_{t_n,t_m} = \mathbf{1}_{A(n)}(j)\frac{1}{D(t_n,t_m)} + c^j_{t_m}\mathbf{1}_{B(n)}(j)$
  $A(n) =$ BOT che scadono al tempo t_n;
  $B(n) =$ BTP con pagamento di cedola al tempo t_n;
  $c^j_{t_m} =$ cedola per il BTP emesso alla pari a scadenza in t_m
- Il valore della cedola per un titolo emesso in t_n e a scadenza in t_m è determinato dalla seguente espressione:

$$c_{t_n}(t_m) = \frac{1 - p(t_n, t_m)}{K(\sum_{j=n+1}^{m} p(t_n, t_j))}$$

Modello a due periodi: $j = 2$

Lo Stato emette BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in t_2 con pagamento di cedola al tempo t_1. Per coprirsi da questi pagamenti, in t_1 emette ulteriori BOT a scadenza in t_2. Sia u^1 il numero di BOT emessi, u^2 numero di BTP emessi ($u^1 + u^2 = K_0$). Si ha che:

- $$d^1_{u,0} = d^1_{d,0} = \exp(Kr_0), \quad d^2_{u,0} = d^2_{d,0} = c_0(t_2)$$
- Dunque i BOT emessi al tempo t_1 sono: $u^3 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2$
- I costi totali in t_2 sono due e dipendono se il mercato tra $[t_1, t_2]$ è salito o sceso.
  $C_{uu} = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$
  $C_{dd} = \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$

Modello a due periodi: $j = 2$

Lo Stato emette BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in t_2 con pagamento di cedola al tempo t_1. Per coprirsi da questi pagamenti, in t_1 emette ulteriori BOT a scadenza in t_2. Sia u^1 il numero di BOT emessi, u^2 numero di BTP emessi ($u^1 + u^2 = K_0$). Si ha che:

- $$d^1_{u,0} = d^1_{d,0} = \exp(Kr_0), \quad d^2_{u,0} = d^2_{d,0} = c_0(t_2)$$
- Dunque i BOT emessi al tempo t_1 sono: $u^3 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2$
- I costi totali in t_2 sono due e dipendono se il mercato tra $[t_1, t_2]$ è salito o sceso.
  $C_{uu} = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$
  $C_{dd} = \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$

Modello a due periodi: $j = 2$

Lo Stato emette BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in t_2 con pagamento di cedola al tempo t_1. Per coprirsi da questi pagamenti, in t_1 emette ulteriori BOT a scadenza in t_2. Sia u^1 il numero di BOT emessi, u^2 numero di BTP emessi $(u^1 + u^2 = K_0)$. Si ha che:

- $$d^1_{u,0} = d^1_{d,0} = \exp(Kr_0), \quad d^2_{u,0} = d^2_{d,0} = c_0(t_2)$$
- Dunque i BOT emessi al tempo t_1 sono: $u^3 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2$
- I costi totali in t_2 sono due e dipendono se il mercato tra $[t_1, t_2]$ è salito o sceso.
  $C_{uu} = \exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$
  $C_{dd} = \exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^1 + (exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))c_0(t_2) + 1 + c_0(t_2))u^2$

Soluzione a due periodi

$p(0, t_2)$ verrà scambiato con questi vincoli:
$\exp(K(-2r_0 - \sigma\sqrt{K})) < p(0, t_2) < \exp(K(-2r_0 + \sigma\sqrt{K}))$.
i) Emissione ottimale $u^1 = 0, u^2 = K_0$ se

$$p(0, t_2) > \frac{(1-K)\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(Kr_0)) + 1 - K}$$

ii) Emissione ottimale $u^1 = K_0, u^2 = 0$ se:

$$p(0, t_2) < \frac{(1-K)\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-Kr_0)}{\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(Kr_0)) + 1 - K}$$

iii) Se non valgono le precedenti, allora l'emissione ottimale è data dal rischio ρ che decidiamo di correre. Il vincolo è:

$$u^2 = \frac{\frac{2\beta\rho\exp(K(-r_0+\sigma\sqrt{K}))}{(1-\beta)(\exp(2K\sigma\sqrt{K})-1)} - K_0\exp(Kr_0)}{c_0^2 - \exp(Kr_0)}, \quad u^1 = K_0 - u^2$$

Supponiamo di avere i seguenti dati numerici:

$$K = 1; r_0 = 0.03; \quad \sigma = 0.01; \quad K_0 = 100;$$

Sostituendo i dati numerici abbiamo:

$$0.932394 < p(0, t_2) < 0.951229$$

La *i*) e la *ii*) del teorema sono rispettivamente:

$$p(0, t_2) > 0.951229$$

$$p(0, t_2) < 0.932394$$

nessuna delle due può essere soddisfatta: non esiste un valore di $p(0, t_2)$ accettabile per cui convenga emettere solo BOT o BTP. Il vincolo sull'indice di rischio diventa:

$$u^2 = 98.6514 - 468.586\rho$$

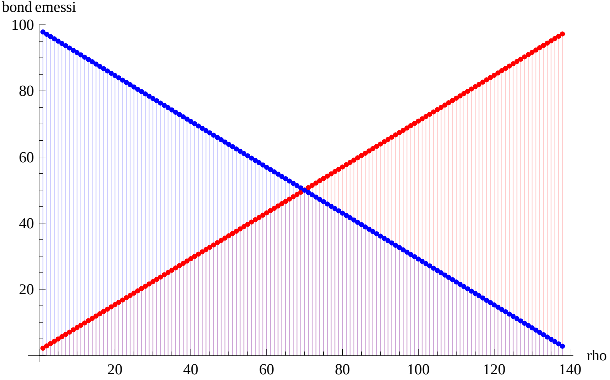

Figura: Grafico delle emissioni ottimali che minimizza il costo medio all'aumentare dell'indice di rischio sull'asse x (varia da 0.3 a 15 a passi di 0.1) con $p(0, t_2) = 0.955$

Modello a tre periodi

Lo Stato emette in t_0 BOT a scadenza in t_1 e BTP a scadenza in t_2 e t_3 per coprire un debito creato precedentemente.
In t_1 emette BOT a scadenza in t_2 e BTP a scadenza in t_3.
In t_2 emette BOT a scadenza in t_3.
u^1=BOT emesso in t_0; u^2=BTP in t_0 a scadenza in t_2
u^3=BTP in t_0 a scadenza in t_3
u^4=BOT emesso in t_1 se $r_{t_1} = r_u$; u^5 BTP emesso in t_1 se $r_{t_1} = r_u$
u^7=BOT emesso in t_1 se $r_{t_1} = r_d$, u^8 BTP emesso in t_1 se $r_{t_1} = r_d$
Cedole:

$$c_0(t_2) = \frac{1 - p(0,t_2)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0,t_2))}$$

$$c_0(t_3) = \frac{1 - p(0,t_3)}{K(\exp(-Kr_0) + p(0,t_2) + p(0,t_3))}$$

La cedola per i BTP emessi in t_1 e a scadenza in t_3 dipende se tra $[t_0, t_1]$ i tassi sono saliti oppure scesi. Si ha che:

$$c_u(t_3) = \frac{1 - p^u(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K})) + p^u(t_1, t_3))}$$

$$c_d(t_3) = \frac{1 - p^d(t_1, t_3)}{K(\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K})) + p^d(t_1, t_3))}$$

Abbiamo che:

$$p^u(t_1, t_3) = E^Q[D(t_1, t_3)|r_{t_1} = r_u]$$
$$p^d(t_1, t_3) = E^Q[D(t_1, t_3)|r_{t_1} = r_d]$$

I quali devono soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\exp(K(-3r_0 - 3\sigma\sqrt{K})) < p^u(t_1, t_3) < \exp(K(-3r_0 - \sigma\sqrt{K}))$$
$$\exp(K(-3r_0 + \sigma\sqrt{K})) < p^d(t_1, t_3) < \exp(K(-3r_0 + 3\sigma\sqrt{K}))$$

Al tempo t_1 le spese dello Stato sono date del BOT scaduto e dal pagamento delle cedole. Questa spesa è la stessa in tutti gli scenari perchè non dipende dall'andamento dei tassi.

$$d^1_{u,0} = \exp(Kr_0) = d^1_{d,0} \quad d^2_{u,0} = c_0(t_2) = d^2_{d,0}$$

$$d^3_{u,0} = c_0(t_3) = d^3_{d,0}$$

$$u^4 + u^5 = u^7 + u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$$

Al tempo t_2 scade u^2 e u^4 oppure u^7. Detto u^6 il BOT emesso in t_2 se $r_{t_1} = r_u$ e u^9 il BOT emesso se $r_{t_1} = r_d$ si ha:

$$u^6 = \exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^4 + c_u(t_3)u^5 + (1 + c_0(t_2))u^2 + c_0(t_3)u^3$$

$$u^9 = \exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^7 + c_d(t_3)u^8 + (1 + c_0(t_2))u^2 + c_0(t_3)u^3$$

Costi finali

In t_3 scadono il BOT emesso in t_2 e i BTP emessi in t_1 e in t_0
Abbiano in definitiva 4 possibili scenari e dunque costi:

$$C_{uuu} = (1 + c_0^2)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))u^2 + \exp(K(r_0+2\sigma\sqrt{K}))c_0(t_3)+1+c_0(t_3))u^3+(\exp(K(2r_0+3\sigma\sqrt{K}))u^4+ (\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K}))c_u(t_3) + 1 + c_u(t_3))u^5;$$

$$C_{udu} = (1+c_0(t_2))\exp(Kr_0)u^2+(\exp(Kr_0)c_0(t_3)+1+c_0(t_3))u^3 (\exp(K(2r_0 + \sigma\sqrt{K}))u^4 + (\exp(Kr_0)c_u(t_3) + 1 + c_u(t_3))u^5;$$

$$C_{duu} = (1+c_0(t_2))\exp(Kr_0)u^2+(\exp(Kr_0)c_0(t_3)+1+c_0(t_3))u^3 (\exp(K(2r_0 - \sigma\sqrt{K}))u^7 + (\exp(Kr_0)c_d(t_3) + 1 + c_d(t_3))u^8;$$

$$C_{ddu} = (1 + c_0(t_2))\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))u^2 + (\exp(K(r_0-2\sigma\sqrt{K}))c_0(t_3)+1+c_0(t_3))u^3+(\exp(K(2r_0-3\sigma\sqrt{K}))u^8 +(\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))c_d(t_3) + 1 + c_d(t_3))u^8;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_u$

- *i*) Emissione $u^5 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3, u^4 = 0$ se
$$p^u(t_1, t_3) > \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$
- *ii*) Emissione $u^5 = 0, u^4 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se $p^u(t_1, t_3) <$
$$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})))(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$
- *iii*) Nel caso non dovessero valere *i*),*ii*), vincolo CVaR_β:
$$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$
$$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0; \quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$$
$$C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0; \quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_u$

- *i*) Emissione $u^5 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3, u^4 = 0$ se

$$p^u(t_1, t_3) > \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$

- *ii*) Emissione $u^5 = 0, u^4 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se $p^u(t_1, t_3) <$

$$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})))(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$

- *iii*) Nel caso non dovessero valere *i*),*ii*), vincolo CVaR_β:

$$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$

$$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0; \quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$$
$$C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0; \quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_u$

- i) Emissione $u^5 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3, u^4 = 0$ se
$$p^u(t_1, t_3) > \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$
- ii) Emissione $u^5 = 0, u^4 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se $p^u(t_1, t_3) <$
$$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 + 2\sigma\sqrt{K})))(1 + K\exp(K(r_0 + \sigma\sqrt{K}))}$$
- iii) Nel caso non dovessero valere i),ii), vincolo CVaR_β:
$$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$
$$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0; \quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$$
$$C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0; \quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_d$

- *i*) Emissione ottimale $u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$
  $u^7 = 0$ se $p^d(t_1, t_3) >$
  $$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *ii*) Emissione ottimale data da $u^8 = 0$
  $u^7 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se:
  $$p^d(t_1, t_3) < \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *iii*) Nel caso non dovessero valere *i*),*ii*), vincolo CVaR_β:
  $$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$
  $$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0; \quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$$
  $$C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0; \quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_d$

- *i*) Emissione ottimale $u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$
  $u^7 = 0$ se $p^d(t_1, t_3) >$
  $$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *ii*) Emissione ottimale data da $u^8 = 0$
  $u^7 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se:
  $$p^d(t_1, t_3) < \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *iii*) Nel caso non dovessero valere *i*),*ii*), vincolo CVaR_β:
  $$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$
  $$C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0; \quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$$
  $$C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0; \quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$$

Emissioni ottimali in t_1 nel caso $r_{t_1} = r_d$

- *i*) Emissione ottimale $u^8 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$
  $u^7 = 0$ se $p^d(t_1, t_3) >$
  $$\frac{(1-K)\exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K})) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(K(r_0 - 2\sigma\sqrt{K}))(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *ii*) Emissione ottimale data da $u^8 = 0$
  $u^7 = \exp(Kr_0)u^1 + c_0(t_2)u^2 + c_0(t_3)u^3$ se:
  $$p^d(t_1, t_3) < \frac{(1-K)\exp(Kr_0) + 1 + K\exp(-K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}{1 - K + \exp(Kr_0)(1 + K\exp(K(r_0 - \sigma\sqrt{K}))}$$
- *iii*) Nel caso non dovessero valere *i*),*ii*), vincolo CVaR_β:
  $$t + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{2(1-\beta)} < \rho$$
  $C_{uuu} - E[C] - t < \lambda_1, \lambda_1 > 0;\quad C_{udu} - E[C] - t < \lambda_2, \lambda_2 > 0;$
  $C_{duu} - E[C] - t < \lambda_3, \lambda_3 > 0;\quad C_{ddu} - E[C] - t < \lambda_4, \lambda_4 > 0;$

Esempio numerico

$r_0 = 0.05; \sigma = 0.02; K = 1;\ \ K_0 = 100$
$p(0, t_2) = 0.9078$. Con questi dati, esplicitando $p(0, t_3)$ si ha che:

$$0.858449 < p(0, t_3) < 0.870176$$

Le *i*) dei teoremi precedenti (caso $r_{t_1} = r_u$ e $r_{t_1} = r_d$) sono rispettivamente soddisfatte se:

$$p(0, t_3) > 0.870176 \quad p(0, t_3) > 0.894904$$

Che non possono essere soddisfatte.
Le *ii*) dei teoremi precedenti (caso $r_{t_1} = r_u$ e $r_{t_1} = r_d$) sono soddisfatte se:

$$p(0, t_3) < 0.837844 \quad p(0, t_3) < 0.858449$$

Che non vengono soddisfatte. Quindi valgono le *iii*) dei teoremi.
Supponiamo $p(0, t_3) = 0.86$ e facciamo variare l'indice di rischio ρ tra 0.35 e 5 a passi di 0.01.

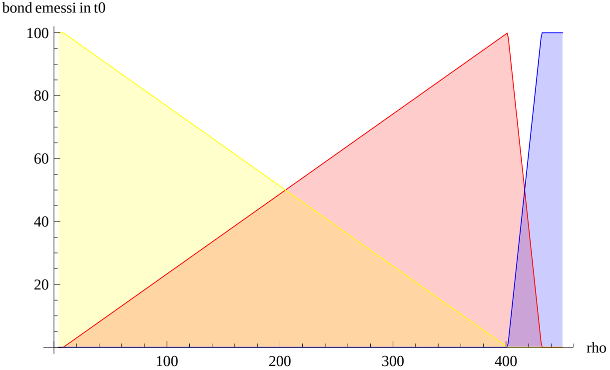

Figura: Linea rossa BOT a scadenza t_1. Blu BTP scadenza t_2, giallo BTP scadenza t_3

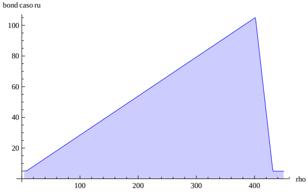

Figura: Se $r_{t_1} = r_u$ conviene emettere in t_1 BTP a scadenza in t_3.

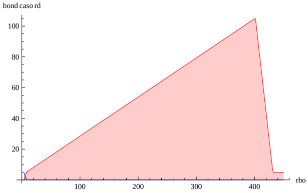

Figura: Emissioni nel caso $r_{t_1} = r_d$